序　言

模函数与模形式，更一般地，自守函数与自守形式是数学的一个重要分支，它是在19世纪后期由J. H. Poincaré(1854—1912)，及C. F. Klein(1849—1925)所创立的. 在此之前，N. H. Abel(1802—1829)、C. G. J. Jacobi(1804—1851)、K. T. W. Weierstrass(1815—1897)，及F. G. M. Eisenstein(1823—1852)等对与它有密切关系的椭圆函数和椭圆曲线作了深入研究①.

模形式理论与数论有着天生的联系. 例如，Riemann给出的Riemann ζ函数的函数方程的两个证明中的一个就是利用模形式$\theta_2(z)$的性质(见§30例1，[P&P1，第十二章])，这揭示了模形式与L函数的内在联系；利用模形式理论在平方和问题(见§32，[EG])及无限制整数分拆问题(见§33，[P&P1，第三十六章])上得到了漂亮的结果.

经历了相当一段的沉默，大约从20世纪六七十年代起，模形式理论开始了一个新的蓬勃发展时期，以其不断在著名数论问题上取得的重大成果与进展引起了数学界的广泛重视. 1983年，J. Tunnell (*Inventiones Math.*，72(1983)，323～334)应用椭圆曲线和模形式理论在同余数问题(见第一章问题20,21)上取得了重大成果(亦见[NK])，他给出了一个有效方法来判断一个自然数n是不是同余数，即n是不是一个边长为有理数的直角三角形的面积. 1980年前后，在关于Kloosterman和均值估计的Linnik-Selberg猜想上取得了重要进展，更清楚地揭示了模形式理论和解析数论之间的密切联系，并使得不少解析数论著名问题的结果得到了较大的改进(1985年在上海举行的中国数学会五十周年年会上，我作了“解析数论的新进展”

---

① 读者要了解这里提到的数学名词和数学家，可查阅以下三本数学百科全书(见参考书目)：[数百1]，[数百2]，[数百3].

的报告,主要就是谈这些成果,以期引起对此的重视. 亦见 H. Iwaniec, Spectral theory of automorphic functions and recent developments in analytic number theory, *Proceedings of ICM*, Berkeley, California, USA, 1986, 444～456). 最令人激动和兴奋的事件终于在上世纪末出现了,1993 年 6 月 21～23 日,40 岁的英国数学家 Andrew Wiles 在英国剑桥的 I. Newton 学院连续三天作了题为“模形式、椭圆曲线和 Galoi 表示”的报告,在 23 日上午 10 时 30 分,报告即将结束时,他宣布“**这表明 F. L. T.** (即 Fermat 大定理)**为真.**”(证明见: A. Wiles, *Annals of Math.*, 141(1995),443～551; R. Taylor 和 A. Wiles, *Annals of Math.*, 141(1995), 553～572.) 这样,历时 350 余年,由 P. de Fermat(1601—1665)所提出的著名论断: 当 $n>2$ 时,不定方程

$$x^n + y^n = z^n, \quad x,y,z \in \mathbf{Z}$$

无 $xyz\neq 0$ 的解,终于被彻底解决了[①]. 这是 20 世纪数学史上最重大的成就之一. 因而,模形式理论就成为当前数学界和年轻学生最关注、最想了解的数学分支之一.

因此,让数学系高年级大学生和低年级研究生(不一定是数论专业的)了解一些经典模形式理论的基础知识,对它产生兴趣,就是十分必要的了. 自上个世纪 60 年代以来,有关的好教材出了不少,但模形式理论似乎一直有一个‘难学’的名声. 经典模形式理论的基础知识并不复杂艰深、也不要求很高的技巧,但它涉及的知识面的确很广,且要能熟练地综合运用这些知识. 一般来说,它所要求的大学程度的预备知识包括: 分析与复变函数论,高等代数与抽象代数,初等数论与代数数论基础,以及一点非欧几何、Riemann 曲面和椭圆曲线的基础知识. 在大学这些内容并不是都学的,所以,对高年级大学生和低年级研究生要理解它、学好它的确是不容易的. 但另一方面,如果能适当选取内容、适度严格的讲述,尽量减少过于抽象的近代知识,使学生能初步领会模形式的基本思想、语言、方法和理论,那么,

① 建议读者看一下通俗介绍的文章: D. A. Cox, Introduction to Fermat's last theorem, *AMM*, 101(1994),3～14.

这门课对学生应该是很有吸引力的.而且,对于学生学会如何灵活综合地运用大学中所学的相对独立的各门课程中的知识来研究问题,全面巩固所学的知识,提高综合运用数学知识(包括分析,代数和几何)的能力和素质,是十分有益的.承洞和我都认为,为高年级大学生和低年级研究生开设一门这样类型的课程是很有必要的.事实上,我们自上个世纪80年代开始指导解析数论研究生,就一直要求他们具有全面扎实的基础知识,除了解析数论外,还要学习代数数论、丢番图逼近论与超越数论,以及模形式理论等.在1982年前后,我曾请裴定一教授、徐广善教授和朱尧辰教授在北京大学分别讲授了模形式理论、丢番图逼近论和超越数论.根据承洞和我的计划,大约从1994年开始,我在北京大学为高年级大学生和低年级研究生开设了经典模形式理论选修课,并着手撰写教材.到1997年,我们确定了这一课程的框架和内容,基本上定稿了.这三年多来,工作只能由我一人承担了.我又讲授了几次,把书稿发给学生请他们提意见,并不断修改讲法(不是内容的增减)以使它能尽量达到我们的预定目的.这就是撰写本书的指导思想和形成过程.

本书包含以下内容:由于模形式的重要性是体现在椭圆曲线、模形式和L函数三者之间的不可分割的联系上,所以,我们极简单地在第一章讲述了椭圆曲线、椭圆函数与模形式之间的关系,在第十章讲述了模形式与L函数之间的关系.在第二章通过讨论最简单的Eisenstein级数使对模形式先有一个初步的感性认识.简单说来,模函数是上半平面上的半纯函数,它在模变换群(见定义8.1)下保持某种不变性.因此,在第三、四章讨论了完全模群及其同余子群的性质;在第五、六章讨论了模函数,完全模群的模形式及同余子群的模形式的基本知识;以及在第七章介绍了构造同余子群模形式的一般方法——Poincaré级数,并讨论了它的性质.Hecke算子理论是模形式理论中最基本最重要的组成部分,我们在第八、九章分别讨论了完全模群的模形式空间上的Hecke算子及同余子群的模形式空间上的Hecke算子.在第十一章介绍了模形式理论在平方和问题及无限制整数分拆问题上的两个经典应用.为了方便阅读,第十二章附录中给出了大多不加证明地又为本书所需要而在大学中不一定系统学过

的内容，读者可以边读本书边补这些知识. 在第一到第十章，附有一些问题，以供练习. 本书中的定义、定理、公式等均按每节排列.

显然，作为模形式基础教材，这些内容可能是不能再少了. 我们不涉及半整权模形式、迹公式等重要内容，不从李群和离散子群的观点出发作一般讨论，近代语言几乎不用，更丝毫不涉及它的近代理论. 但是，我们尽可能把所讨论的内容讲述清楚，当学懂了这些最简单、最基本的东西后，对模形式发生兴趣的学生完全能够进一步(可能更容易地)自学近代的模形式理论. '少则得，多则惑'，科学工作者实质上都是在产生强烈兴趣后自学成材的. 当然，正如不熟练地掌握初等数论就谈不上学习解析数论、代数数论一样，不熟练地掌握本书中这些最基本的知识也就谈不上进一步学习模形式理论.

在本书写作过程中主要参考了以下书籍(见参考书目)：[RG](它出版于 1962 年，但仍是一本模形式的入门好教材)、[NK]、[TA]、[BS]、[TM]，以及[JS]. 希望读者也看看这几本书：[GS]是模形式理论的经典著作，不过对初学者来说实在是太困难了；我们还建议读者可以看一下[PS]，它给出了模形式在不同数学分支中的三个应用. 由于笔者水平有限，书中必有不少缺点以至错误，切望读者指正.

本书的写作得到了北京大学出版社、国家自然科学基金会，以及教育部数学中心的支持. 本书的责任编辑刘勇同志改正了书稿中的一些疏误，提出了许多有益的建议. 对此，我们表示衷心感谢.

潘承彪

2001 年 10 月 25 日

目 录

第一章　椭圆函数

本章是讨论椭圆函数的基本知识. §1 讨论双周期函数和格，为引入椭圆函数作准备；§2 和 §3 讨论椭圆函数的基本性质，特别是 Weierstrass $\wp$ 函数的基本性质及椭圆函数的构造；以及 §4 讨论了 Theta 函数，这不仅是构造椭圆函数的又一途径，而且由它可以构造模形式.

§1　双周期函数和格

周期函数是我们熟知的数学中的一个重要的基本概念和工具. 它的定义如下：

定义 1.1　定义在复平面 $\boldsymbol{C}$ 上的复值函数 $f(z)$ 称为**周期函数**，如果它不等于常数，且存在复数 $\omega\neq 0$，使对任意的 $z\in\boldsymbol{C}$ 有 $f(z+\omega)=f(z)$ 成立（当一边为无穷时另一边也为无穷），ω 称为 $f(z)$ 的**周期**. 周期函数 $f(z)$ 的全部周期所组成的集合记作 Λ 或 Λ_f，称为 $f(z)$ 的**周期集合**. 为方便起见**约定** $0\in\Lambda$，但 0 **不是周期**.

周期集合 Λ 显然有以下性质：对任意的 $\omega_1,\omega_2\in\Lambda$，及任意的 $m_1,m_2\in\boldsymbol{Z}$，必有

$$m_1\omega_1+m_2\omega_2\in\Lambda. \tag{1.1}$$

即 Λ 是 $\boldsymbol{C}$ 的加法子群，是 $\boldsymbol{Z}$ 上的线性空间.

$e^{\lambda z}$（λ 是非零复数）是我们最熟悉的周期函数，它的周期集合 $\Lambda=\{2k\pi i/\lambda;\ k\in\boldsymbol{Z}\}$. 在一般情形下，复变量周期函数的周期集合有什么样的性质呢？下面来讨论这个问题.

性质 1.1　如果周期函数 $f(z)$ 是半纯的，那么，它不可能有模为任意小的周期，即存在正常数 a，使得有

$$|\omega|\geqslant a,\quad 0\neq\omega\in\Lambda. \tag{1.2}$$

证　用反证法. 设 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots$ 是 $f(z)$ 的周期，且有 $\omega_n\to 0$.

因此对任意的 z 和 n 有 $f(z+\omega_n)-f(z)=0$. 由此就推出半纯函数 $f(z)$ 在其所有解析点处的导数必为零，所以 $f(z)$ 等于常数. 矛盾.

我们以后所讨论的周期函数都是半纯的，所以它的周期集合都满足条件(1.2). 事实上，对一个正常的周期函数这一要求是合理的. 因此，为了研究周期函数，首先必须搞清满足条件(1.1)和(1.2)的 $\boldsymbol{C}$ 的子集的性质. $\boldsymbol{C}$ 的这种子集本身就是一个十分重要的数学概念，与周期函数的概念并无直接联系. 下面就先来讨论它的性质. 像通常一样，我们**把全体复数组成的集合、复平面、及平面上从原点出发的向量集合看做是同一的**，均记为 $\boldsymbol{C}$.

性质 1.2 设 $\boldsymbol{C}$ 的子集 Λ 满足条件(1.1). 那么，条件(1.2)等价于条件：

在 $\boldsymbol{C}$ 的任意一个有限区域 D 内只可能有 Λ 中的有限个点，

(1.3)

即 Λ 不能有有限极限点.

证 (1.3)$\Longrightarrow$(1.2). 取 r 是适当大的正数，使区域 D 取为 $|z|<r$ 时，在 D 中必有 Λ 中的非零元素. 由条件(1.3)知在这样的 D 中至多有有限个 $\omega\in\Lambda$. 因此，必有 $a>0$ 使条件(1.2)成立.

(1.2)$\Longrightarrow$(1.3). 用反证法. 假设存在两两不同的无穷点列 $\omega_n\in\Lambda\cup D, n=1,2,\cdots$. 因 D 是有限区域，故必有子序列 $\omega_{1,n}(n=1,2,\cdots)$，使当 $n\to\infty$ 时，$\omega_{1,n}\to z_0$ (z_0 不一定属于 Λ 或 D). 设 $\omega_n'=\omega_{1,n+1}-\omega_{1,n}$. 显然有 $0\neq\omega_n'\in\Lambda$, $|\omega_n'|\to 0$. 这和条件(1.2)矛盾. 证毕.

由性质 1.2 立即推出(证明留给读者)

性质 1.3 设 Λ 满足条件(1.1)和(1.2). Λ_1 是 Λ 的子集，且至少有两个元素. 那么，必有 $0\neq\omega^*\in\Lambda_1$，使对任意的 $0\neq\omega\in\Lambda_1$ 有

$$|\omega|\geqslant|\omega^*|. \tag{1.4}$$

性质 1.4 设 Λ 满足条件(1.1)和(1.2). 那么，对任意非零的 $\omega_1,\omega_2\in\Lambda$, ω_1/ω_2 一定不等于实无理数.

证 若 $\mathrm{Im}\,\omega_1/\omega_2\neq0$，则结论成立. 故只要讨论 ω_1/ω_2 是实数的情形. 考虑 Λ 中所有形如 $a\omega_1$ (a 为任意实数)的元素组成的子集 Λ_1. 由性质 1.3 知必有 $0\neq\omega^*\in\Lambda_1$ 满足式(1.4). 设 $\omega_j=a_j\omega^*$ ($j=1,2$). 容

易看出 $\omega_j-[a_j]\omega^*=(a_j-[a_j])\omega^*$ 都属于 $\Lambda_1, j=1,2$. 由此及 ω^* 的最小性(即式(1.4))就推出 $a_j-[a_j]=0, j=1,2$. 因此, a_j 均是整数,故 ω_1/ω_2 是有理数. 证毕.

由性质 1.4 立即推出: 当 Λ 满足条件(1.1)和(1.2)时,在通过原点的一条直线 l 上,若有 $0\neq\omega\in\Lambda\cap l$,那么,一定存在 ω^* 使得

$$\omega\in\Lambda\cap l\Longleftrightarrow\omega=m\omega^*,\quad m\in\mathbf{Z}. \tag{1.5}$$

证明留给读者. 下面的性质是最重要的.

性质 1.5 设 Λ 满足条件(1.1)和(1.2). 那么,以下两种情形有且仅有一种成立:

(i) 存在 ω_1 使得

$$\Lambda=\{m_1\omega_1: m_1\in\mathbf{Z}\}, \tag{1.6}$$

即 Λ 是 $\mathbf{Z}$ 上的一维线性空间;

(ii) 存在 $\omega_1,\omega_2,\mathrm{Im}\,\omega_1/\omega_2\neq0$,使得

$$\Lambda=\{m_1\omega_1+m_2\omega_2: m_1,m_2\in\mathbf{Z}\}, \tag{1.7}$$

即 Λ 是 $\mathbf{Z}$ 上的二维线性空间.

证 若 Λ 中任意两个非零元素之比均为实数,则由性质 1.4 及式(1.5)知必有情形(i)成立. 不然, Λ 中必有两个非零元素之比的虚部不等于零,它们和原点 O 构成一个三角形. 由性质 1.1 知在这三角形中一定可找到一子三角形 OAB(见图 1.1),使得 $\overrightarrow{OA}=\omega_2\in\Lambda$, $\overrightarrow{OB}=\omega_1\in\Lambda$,且在三角形 OAB 上没有其他的 Λ 中的非零元素(为什么). 我们来证明这样的 ω_1 和 ω_2 必满足式(1.7). 设 $0\neq\omega\in\Lambda$,必有

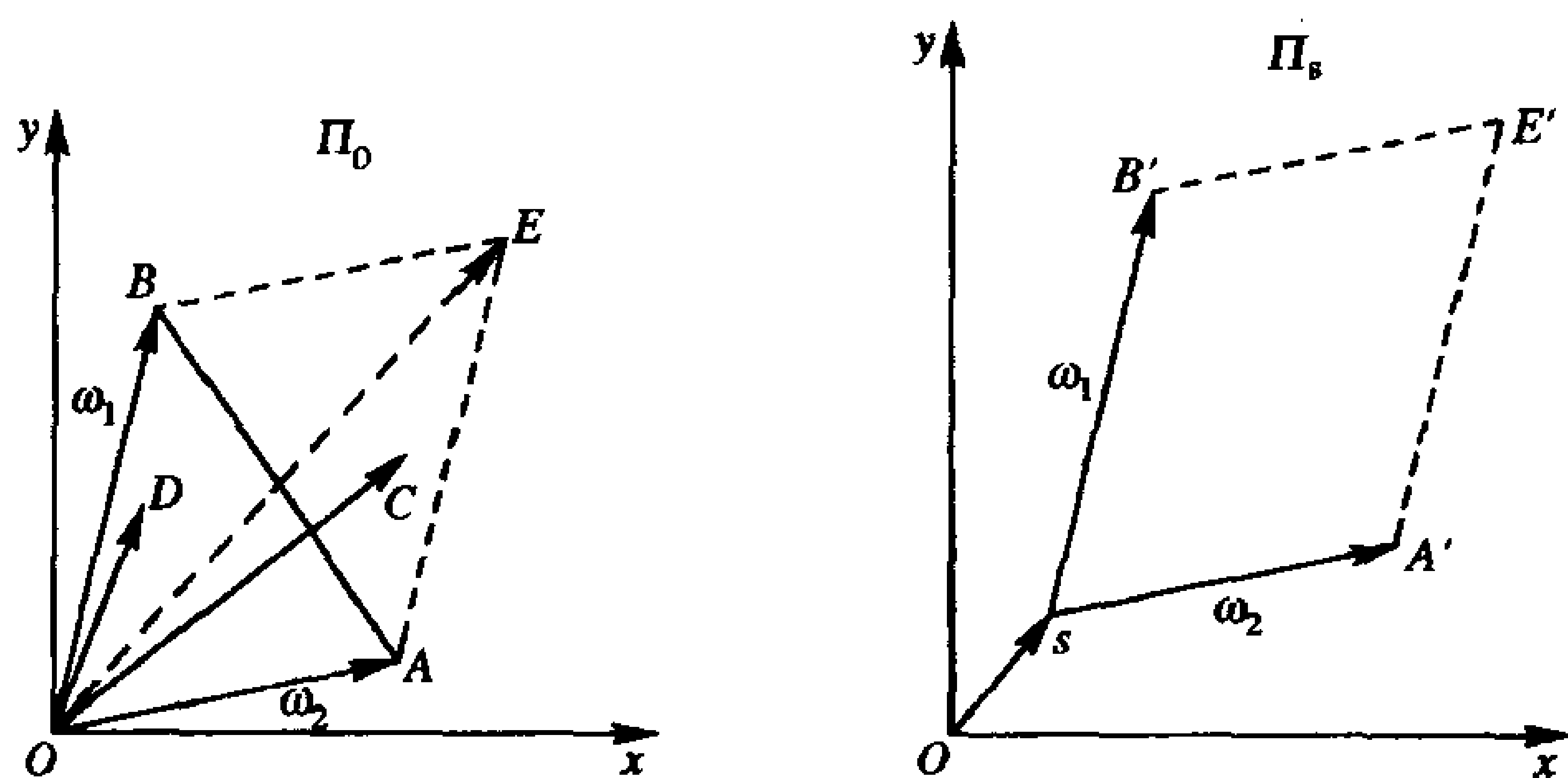


图 1.1

实数 λ_1,λ_2 使得

$$\omega = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 = [\lambda_1]\omega_1 + [\lambda_2]\omega_2 + \{\lambda_1\}\omega_1 + \{\lambda_2\}\omega_2.$$

若$\{\lambda_1\},\{\lambda_2\}$不全为零,则 $0\neq\overrightarrow{OC}=\{\lambda_1\}\omega_1+\{\lambda_2\}\omega_2\in\Lambda$. 由取法知$\overrightarrow{OC}$不在三角形 OAB 上,所以 $\overrightarrow{OC}$必在三角形 AEB 内,这里$\overrightarrow{OE}=\omega_1+\omega_2$(为什么? 见图 1.1). 这样就有

$$0\neq\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=(\omega_1+\omega_2)-(\{\lambda_1\}\omega_1+\{\lambda_2\}\omega_2)\in\Lambda.$$

但 $\overrightarrow{OD}$必在三角形 OAB 内,矛盾. 故 λ_1,λ_2 为整数,即(1.7)成立. 证毕.

性质 1.5 使我们可引进以下的重要概念.

定义 1.2　给定一对不共线的复数 ω_1,ω_2,即 $\mathrm{Im}\,\omega_1/\omega_2\neq 0$,我们称集合

$$\Lambda = \Lambda(\omega_1,\omega_2) = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2;\ m_1,m_2 \in \boldsymbol{Z}\} \tag{1.8}$$

是复平面上 $\boldsymbol{C}$ 的一个**点格**或**格**,格中的元素称为**格点**,$\{\omega_1,\omega_2\}$称为格的一组**基**.

性质 1.5 表明: $\boldsymbol{C}$ 的一个子集是格的充要条件是它满足条件(1.1)和(1.2),且有两个不共线的元素. 这也可作为格的定义,但这里的定义更为直观、自然.

设 K 是一个有幺元素 e 的交换环,K^*是 K 中全体可逆元素组成的乘法群. 记 K 上的二阶矩阵集合

$$\mathrm{GL}_2(K) = \left\{\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ a,b,c,d \in K,\ |\alpha| = ad - bc \in K^*\right\}, \tag{1.8'}$$

它组成一个乘法群,称为 K 上的二阶**一般线性群**. 我们把它的子群

$$\mathrm{SL}_2(K) = \{\alpha \in \mathrm{GL}_2(K);\ |\alpha| = e\}, \tag{1.9}$$

称为 K 上的二阶**特殊线性群**. 若 $K\subseteq\boldsymbol{R}$,我们记 $\mathrm{GL}_2(K)$的子群

$$\mathrm{GL}_2^+(K) = \{\alpha \in \mathrm{GL}_2(K);\ |\alpha| > 0\}. \tag{1.10}$$

定义 1.3　$\boldsymbol{R}$ 上的特殊线性群 $\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{R})$称为**辛群**;$\boldsymbol{Z}$ 上的特殊线性群 $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z})$称为**完全模群**,$\Gamma$ 的子群称为**模群**,记为 Γ',Γ'' 等.

性质 1.6　格 $\Lambda(\omega_1',\omega_2')$等于格 $\Lambda(\omega_1,\omega_2)$,即它们有相同的格点的充要条件是存在

$$\alpha \in \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Z}),\quad |\alpha| = \pm 1,$$

使得

$$\begin{bmatrix}\omega_1' \\ \omega_2'\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

证明留给读者(见图 1.2). 这表明一个格的基不是惟一的,满足上式的$\{\omega_1', \omega_2'\}$一定是格 $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$的一组基. 特别的$\{\omega_2, \omega_1\}$一定是格 $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$的一组基. 显见, $\mathrm{Im}\omega_1/\omega_2$ 和 $\mathrm{Im}\omega_2/\omega_1$ 有且只有一个是正的. **为了确定起见,以后说到$\{\omega_1, \omega_2\}$是格 Λ 的一组基及出现符号格 $\Lambda = \Lambda(\omega_1, \omega_2)$ 时,总假定满足条件:**

$$\mathrm{Im}\omega_1/\omega_2 > 0. \tag{1.12}$$

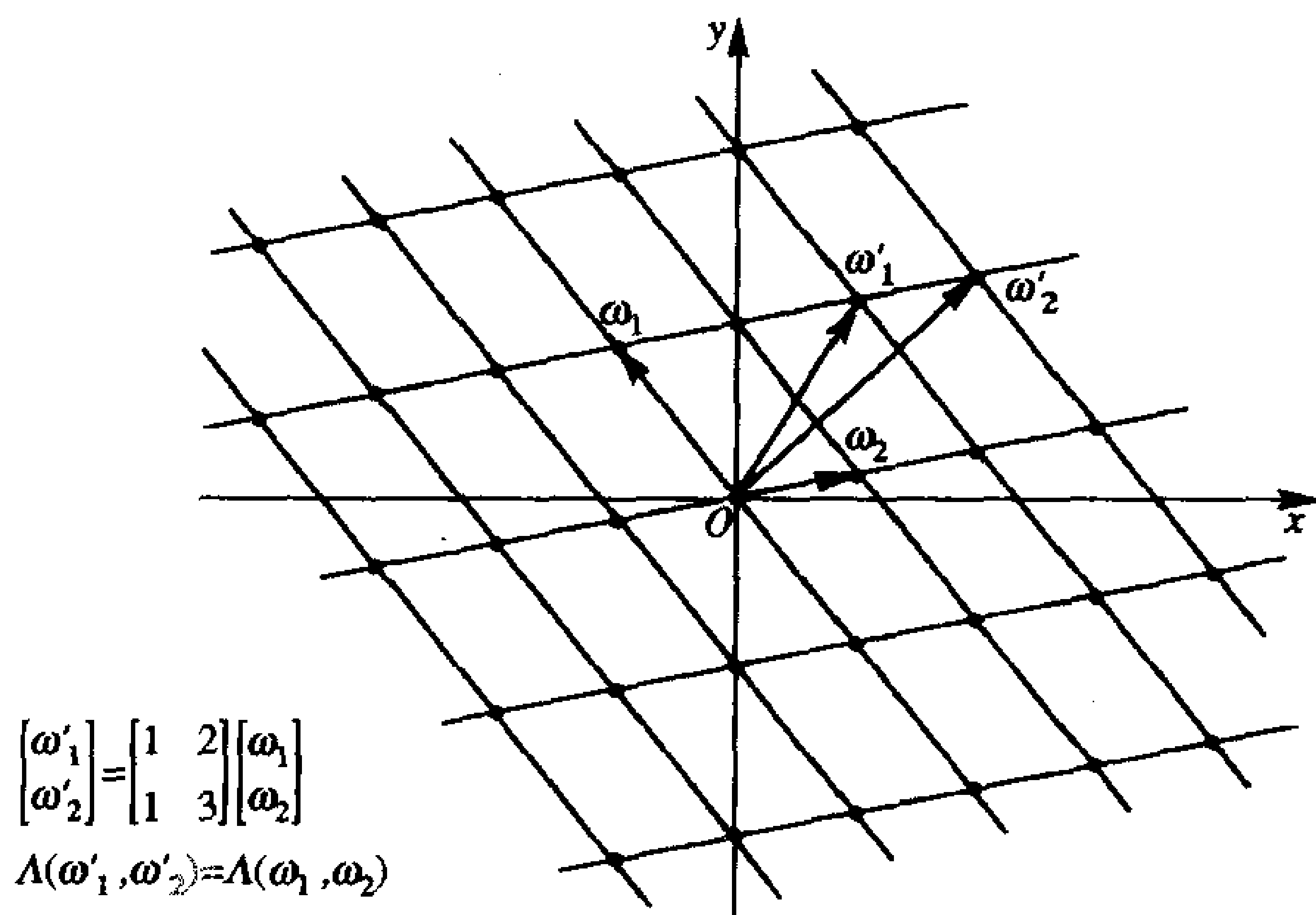


图 1.2

在这样的约定(1.12)下,性质 1.6 就变为

性质 1.7　$\{\omega_1', \omega_2'\}$是格 $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$的一组基的充要条件是存在

$$\alpha = \begin{bmatrix}a & b \\ c & d\end{bmatrix} \in \Gamma, \tag{1.13}$$

使得式(1.11)成立.

证　先假定 $\alpha \in GL_2(\boldsymbol{R})$,并有式(1.11)成立. 这时有

$$\begin{aligned}\tau' &= \frac{\omega_1'}{\omega_2'} = \frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2} = \frac{(a\tau + b)(c\bar{\tau} + d)}{|c\tau + d|^2}, \\ \tau &= \frac{\omega_1}{\omega_2}.\end{aligned} \tag{1.14}$$

因而得到

$$\operatorname{Im}\frac{\omega_1'}{\omega_2'}=\operatorname{Im}\tau'=\frac{ad-bc}{|c\tau+d|^2}\operatorname{Im}\tau=\frac{ad-bc}{|c\tau+d|^2}\operatorname{Im}\frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (1.15)$$

由此及性质 1.6 就证明了所要的结论.

由以上讨论,可相应得到关于周期函数的周期集合的性质.

性质 1.8 设 Λ 是周期函数 $f(z)$ 的周期集合,满足条件(1.1)和(1.2).那么,Λ 必是性质 1.5 中的(i)或(ii)这两种情形之一.

这样,由性质 1.6 和 1.7 知,可引进

定义 1.4 设 $f(z)$ 是周期函数,周期集合 Λ 满足条件(1.1)和(1.2).那么,当性质 5 中的情形(i)成立时,$f(z)$ 称为是**单周期函数**,ω_1 称为它的**基本周期**;当性质 1.5 中的情形(ii)成立时,$f(z)$ 称为是**双周期函数**,满足条件(1.12)的 $\{\omega_1,\omega_2\}$ 称为它的**基本周期对**.

$\sin z$, $\cos z$, $e^{\lambda z}(\lambda\neq 0)$ 等都是单周期函数.显见,单周期函数的基本周期仅可能是 ω_1 和 $-\omega_1$.而双周期函数的基本周期对是所有满足式(1.11)和(1.13)的 $\{\omega_1',\omega_2'\}$.我们要讨论的是双周期函数.

容易看出,以 $\Lambda(\omega_1,\omega_2)$ 为周期集合的双周期函数 $f(z)$ 只要在半开平行四边形 $OAEB$(见图 1.1):

$$\Pi_0=\Pi_0(\omega_1,\omega_2)=\{r_1\omega_1+r_2\omega_2:\ 0\leqslant r_1<1,0\leqslant r_2<1\} \quad (1.16)$$

上的值定义后,就完全确定了.一般的,对给定的复数 s,Π_0 沿 s 平移得到半开平行四边形(见图 1.1):

$$\begin{aligned}\Pi_s=\Pi_s(\omega_1,\omega_2)&=\Pi_0+s\\&=\{s+(r_1\omega_1+r_2\omega_2):\ 0\leqslant r_1<1,0\leqslant r_2<1\},\end{aligned} \quad (1.17)$$

双周期函数 $f(z)$ 只要在 Π_s 上的值定义后,其值就完全确定了.

定义 1.5 设 $f(z)$ 是以 $\Lambda(\omega_1,\omega_2)$ 为周期集合的双周期函数.我们把 Π_0,或一般的把 Π_s 称为是双周期函数 $f(z)$ 的**基本平行四边形**,**周期平行四边形**,或**基本定义域**.也称为是格 $\Lambda(\omega_1,\omega_2)$ 的基本平行四边形.

基本平行四边形 $\Pi_0(OAEB)$,不含两边 AE 和 BE(包括端点),这因为在由下面的等式

$$AE = \omega_2 + OB, \quad BE = \omega_1 + OA$$

分别确定的对应点上 $f(z)$ 的值相等，所以两组对边：OB 和 AE，OA 和 BE 上的相应两点就看做为同一点，以 OB，OA 中的点为代表. 注意到，在 O,A,E,B 四点上的函数值相同，这四点就看做为同一点，以点 O 为代表. 现在我们把平行四边形 $OAEB$ 作这样的粘合：把取相同值的对应点粘合成一点，就得到一个轮胎面(dount)，通常称为**环面**(torus)，它就是 $f(z)$ 的基本平行四边形的一个连续表示，这个环面仍以 Π_0 表示. 这种粘合可以这样具体实现：先把边 OA 和 BE 依对应点粘合，得到一个柱面，两端是圆周 OSB 和 AQE；再把圆周 OSB 和 AQE 依对应点粘合，就得到所要的环面(见图 1.3). 这样，以 $\Lambda(\omega_1,\omega_2)$ 为周期集合的双周期函数就是定义在三维空间中的一个环面 Π_0——即所谓一维复流形——上的复值函数. 对复变量的单

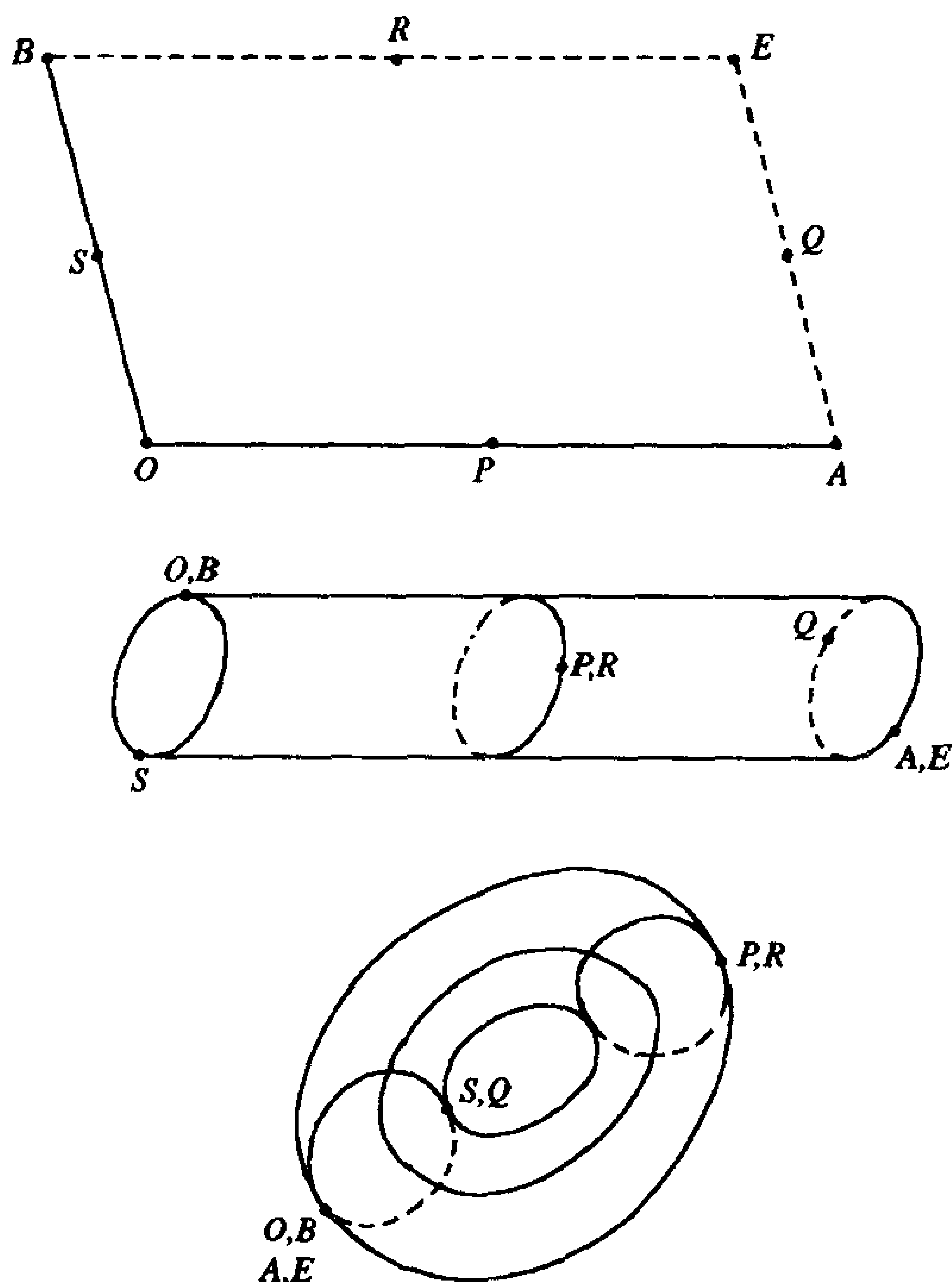


图 1.3

周期函数和实变量的单周期函数也可以用同样的观点来讨论，前者是定义在三维空间中的一个圆柱面上的复值函数，而后者是定义在二维空间中的一个圆周上的复值函数，所以亦称为**圆函数**. 这些讨论留给读者.

在本节最后，再介绍一些有关格的重要概念和基本性质. 再提醒一次，**以后说到**$\{\omega_1,\omega_2\}$**是格的一组基时，总假定满足条件**(1.12).

由于格 Λ 是 $\boldsymbol{C}$ 的加法子群，类似于初等数论中的同余概念和符号，我们引进

定义 1.6　设 Λ 是格，$z,w\in\boldsymbol{C}$. 若 $z-w\in\Lambda$，则称 z **同余于** w **模** Λ，记作

$$z\equiv w(\mathrm{mod}\,\Lambda).$$

若 $z-w\notin\Lambda$，则称 z **不同余于** w **模** Λ，记作

$$z\not\equiv w(\mathrm{mod}\,\Lambda).$$

由于对格 Λ 的同余关系是一个等价关系(为什么)，全体复数 $\boldsymbol{C}$ 按这样的同余关系可分为两两不相交的等价类，称为**模 Λ 的同余类**. 全体模 Λ 的同余类所组成的集合记作 $\Lambda\backslash\boldsymbol{C}$. 对给定的 $z\in\boldsymbol{C}$，z 所属的模 Λ 的同余类记作 $z\bmod\Lambda$. 显见

$$z\bmod\Lambda=\{w\in\boldsymbol{C}:\ w\equiv z(\mathrm{mod}\,\Lambda)\}.$$

在每个模 Λ 的同余类中各取定一个复数作为代表，得到的集合就称为是 $\boldsymbol{C}$ 关于模 Λ 的代表系，记作$\{\Lambda\backslash\boldsymbol{C}\}$或 $\Lambda\backslash\boldsymbol{C}$.

容易看出，$z_1\bmod\Lambda=z_2\bmod\Lambda$ 的充要条件是 $z_1\equiv z_2(\mathrm{mod}\,\Lambda)$. 定义同余类的加法为：

$$z_1\bmod\Lambda+z_2\bmod\Lambda=(z_1+z_2)\bmod\Lambda.$$

这样，全体模 Λ 的同余类所组成的集合 $\Lambda\backslash\boldsymbol{C}$ 构成加法交换群，零元素是 $0\bmod\Lambda=\Lambda$. 这个群 $\Lambda\backslash\boldsymbol{C}$ 就是熟知的 $\boldsymbol{C}$ 关于其子群 Λ 的商群. 所以，$\boldsymbol{C}$ 关于模 Λ 的代表系就是在商群 $\Lambda\backslash\boldsymbol{C}$ 的每个元素(即每个模 Λ 的同余类)中各取一个复数作为代表，它在模 Λ 的加法下构成一个群. 式(1.16)和(1.17)就是这样的代表系的例子. 根据不同需要可选取不同的代表系. 显见，一个以格 Λ 为周期集合的双周期函数 $f(z)$在任意取定的一个模 Λ 的代表系上的值确定后就完全确定了，所以，双周期函数 $f(z)$可以看做是定义在商群 $\Lambda\backslash\boldsymbol{C}$ 上的函数，而环

面(见图 1.3)就是商群 $\Lambda\backslash C$ 的几何表示.

对取定的复数 s,由它生成的最小子群 $\{s\}=\{ms: m\in \mathbf{Z}\}$,在 $\mathbf{C}$ 到 $\Lambda\backslash C$ 的自然映射: $z\mapsto z \bmod \Lambda$ 下,$\{s\}$的像集是$\{ms \bmod \Lambda: m\in \mathbf{Z}\}$. 这是一个同态,像集是 $\Lambda\backslash C$ 的子群. 这时会出现两种情形: (i) 像集是无限阶子群;(ii) 像集是有限阶子群. 因此,可引进

定义 1.7 在上述的情形(i),我们称 s 是格 Λ 的**无限阶点**;在上述的情形(ii),我们称 s 是格 Λ 的**有限阶点**,子群$\{ms \bmod \Lambda: m\in \mathbf{Z}\}$ 的**阶**就称为是**点** s **关于格** Λ **的阶**.

性质 1.9 设 Λ 是格,$z\in \mathbf{C}$. 那么,z 是格 Λ 的有限阶点的充要条件是存在正整数 L,使得

$$Lz \in \Lambda. \tag{1.18}$$

若 z 是格 Λ 的有限阶点,则使上式成立的最小正整数 L_0 就是它的阶. 此外,若 z 是 L_0 阶格点,则式(1.18)成立的充要条件是 $L_0|L$.

证 *充分性* 当式(1.18)成立时,对任意的 $m\in \mathbf{Z}$,有 $mz\equiv (m+L)z(\bmod \Lambda)$. 所以子群 $\{mz\}$ 的像集至多有 L 个不同元素 $jz \bmod \Lambda, j=0,1,\cdots,L-1$. 所以 z 是有限阶点.

必要性 由像集是有限的可推出必有 $m_1>m_2$ 使得 $m_1z\equiv m_2z(\bmod \Lambda)$,取 $L=m_1-m_2$ 就满足式(1.18). 若 L_0 是使式(1.18)成立的最小正整数,则显见像集 $\{mz \bmod \Lambda: m\in \mathbf{Z}\}$ 由且仅由 $jz \bmod \Lambda(j=0,1,\cdots,L_0-1)$ 这 L_0 个不同元素构成,即 z 关于格 Λ 的阶是 L_0. 由 L_0 的最小性及 $L=qL_0+r, 0\leqslant r<L_0$,就推出 $L_0|L$.

性质 1.10 设 Λ 是格,ω_1,ω_2 是它的一组基. 那么,z 是 Λ 的 m 阶点的充要条件是存在整数 a,b 使得

$$z=(a/m)\omega_1+(b/m)\omega_2,\quad (m,a,b)=1. \tag{1.19}$$

此外,两两不同余于模 Λ 的全部 m 阶点的个数等于

$$m^2\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right). \tag{1.20}$$

证 前一部分结论由基的定义及性质 1.9 推出. 下面来证式(1.20). 由式(1.19)知,这就是要求两两不同余于模 m 的数对 $\{a,b\}$, $(m,a,b)=1$ 的个数,即两两不同的剩余类对 $\{a \bmod m, b \bmod m\}$, $(m,a,b)=1$ 的个数. 它等于

$$\sum_{a=1,b=1}^{m}\sum_{(a,b,m)=1}^{m}1=\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\sum_{d|(a,b,m)}\mu(d)=\sum_{d|m}\mu(d)\sum_{\substack{a=1\\d|a}}^{m}\sum_{\substack{b=1\\d|b}}^{m}1$$

$$=\sum_{d|m}\mu(d)\frac{m^2}{d^2}=m^2\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right).$$

这就证明了式(1.20)，这里 $\mu(d)$是 Möbius 函数，即

$$\mu(d)=\begin{cases}1, & d=1,\\(-1)^r, & d=p_1\cdots p_r,\text{ 素数 } p_j(1\leqslant j\leqslant r)\text{两两不同},\\0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{1.21}$$

下面来讨论子格的概念和基本性质.

定义 1.8 设 Λ 和 Λ'是两个格. 若 $\Lambda\subseteq\Lambda'$，则称 Λ 是 Λ'的**子格**. 也就是说 Λ 是 Λ'的子群. 我们把群 Λ'关于其子群 Λ 的指数$[\Lambda':\Lambda]$称为格 Λ'关于其子格 Λ 的**指数**.

以下两个性质的证明需要用到有关二阶整数矩阵的一些结论，这些结论将在第十二章附录 § 34 中证明.

性质 1.11 设 Λ 和 Λ'是两个格，$\{\omega_1,\omega_2\}$和$\{\omega_1',\omega_2'\}$分别是它们的基，那么 Λ 是 Λ'的子格且指数为 n 的充要条件是存在二阶整数矩阵 $A\in M(n)$($M(n)$的定义见定理 34.11)，使得

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\\omega_2\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\omega_1'\\\omega_2'\end{bmatrix}.\tag{1.22}$$

证 容易看出，Λ 是 Λ'的子格的充要条件是存在行列式为正的二阶整数矩阵 A 使式(1.22)成立. 因此，剩下的是要证指数为 n 的充要条件是$|A|=n$. 设$|A|=m>0$. 由定理 34.11(i)知，存在矩阵 $\beta,\gamma\in\Gamma$ 使得

$$\beta A\gamma^{-1}=\begin{bmatrix}l & 0\\0 & m/l\end{bmatrix},\quad l^2|m.$$

由此及式(1.22)得

$$\begin{bmatrix}\rho_1\\\rho_2\end{bmatrix}=\beta\begin{bmatrix}\omega_1\\\omega_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l & 0\\0 & m/l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho_1'\\\rho_2'\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}\rho_1'\\\rho_2'\end{bmatrix}=\gamma\begin{bmatrix}\omega_1'\\\omega_2'\end{bmatrix}.$$

显见，$\{\rho_1,\rho_2\}$及$\{\rho_1',\rho_2'\}$仍分别是 Λ 和 Λ'的基. 由上式知商群 $\Lambda\backslash\Lambda'$同

构于群

$$\{((u/l)\rho_1 + (lv/m)\rho_2) \bmod \Lambda: 0 \leqslant u < l, 0 \leqslant v < m/l\}$$
$$= \{(u\rho_1' + v\rho_2') \bmod \Lambda: 0 \leqslant u < 1, 0 \leqslant v < m/l\},$$

即$[\Lambda' : \Lambda] = m$. 这就证明了所要的结论.

性质 1.12 设 Λ'是给定的格,n 是给定的正整数. 那么,Λ'的指数为 n 的所有不同的子格 Λ 的个数是除数和函数 $\sigma(n)$,即

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

反之,设 Λ 是给定的格,n 是给定的正整数. 那么,以 Λ 为其子格且指数为 n 的所有不同的格 Λ'的个数也是 $\sigma(n)$.

证 先证第一个结论. 设 Λ_1 和 Λ_2 是 Λ'的两个指数为 n 的子格,$\{\omega_{11}, \omega_{12}\}$和$\{\omega_{21}, \omega_{22}\}$分别是它们的基. 再设$\{\omega_1', \omega_2'\}$是 Λ'的基. 由性质 1.11 知,一定存在 $A_1, A_2 \in M(n)$使得

$$\begin{bmatrix}\omega_{11}\\ \omega_{12}\end{bmatrix} = A_1\begin{bmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\omega_{21}\\ \omega_{22}\end{bmatrix} = A_2\begin{bmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{bmatrix}.$$

由此推出,$\Lambda_1 = \Lambda_2$ 的充要条件是(为什么): $A_1A_2^{-1} \in \Gamma$,即 $A_1 \in \Gamma A_2$. 因此,Λ'的指数为 n 的所有不同的子格 Λ 的个数就是 $M(n)$关于群 Γ 的右陪集分解 $\Gamma\backslash M(n)$的右陪集的个数,由定理 34.11(i)知它等于 $\sigma(n)$.

再证第二个结论. 设 Λ_1' 和 Λ_2' 是以 Λ 为其子格且指数均为 n 的两个格,$\{\omega_{11}', \omega_{12}'\}$和$\{\omega_{21}', \omega_{22}'\}$分别是它们的基. 再设$\{\omega_1, \omega_2\}$是 Λ 的基. 由性质 1.11 知,一定存在 $B_1, B_2 \in M(n)$使得

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix} = B_1\begin{bmatrix}\omega_{11}'\\ \omega_{12}'\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix} = B_2\begin{bmatrix}\omega_{21}'\\ \omega_{22}'\end{bmatrix}.$$

由此推出,$\Lambda_1' = \Lambda_2'$ 的充要条件是(为什么): $B_2^{-1}B_1 \in \Gamma$,即 $B_1 \in B_2\Gamma$. 因此,以 Λ 为其子格且指数均为 n 的所有不同的 Λ'的个数就是 $M(n)$ 关于群 Γ 的左陪集分解 $M(n)/\Gamma$ 的左陪集的个数,由定理 34.11(i)知它也等于 $\sigma(n)$.

§2 椭圆函数及其基本性质

定义 2.1 一个双周期函数如果是半纯的(即在有限复平面上仅有的奇点是极点),就称为**椭圆函数**.

由性质 1.1 和 1.5 知,有两个不共线的周期的周期函数,如果它是半纯的,则条件(1.2)必满足,所以是双周期函数,因而是椭圆函数.以后用到这一点时就不再说明了.本节将讨论椭圆函数的基本性质,以及如何具体构造这样的函数.

性质 2.1 设 $f(z)$是椭圆函数,u 是给定的非零复数.那么,$f(z)+u$,$uf(z)$,$1/f(z)$,及 $f'(z)$都是椭圆函数,且有相同的周期集合.

证 对前三个函数结论是显然的.由于 $f(z)$的周期一定是 $f'(z)$ 的周期,所以 $f'(z)$是椭圆函数.因而,只要证明 $f'(z)$的周期一定是 $f(z)$的周期.设 $f(z)$和 $f'(z)$的基本周期对分别是 ω_1,ω_2 和 ω_1',ω_2'.必有 $\alpha\in GL_2^+(\mathbf{Z})$使得

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

由于对任意的 $z\in \boldsymbol{C}$ 有 $f'(z+\omega_1')-f'(z)=0$,所以,有常数 λ 使对任意的 $z\in \boldsymbol{C}$ 有 $f(z+\omega_1')-f(z)=\lambda$.因而,对任意整数 k 有 $f(z+k\omega_1')-f(z)=k\lambda$.取 $k=|\alpha|$,由式(2.1)得

$$\begin{aligned}|\alpha|\lambda &= f(z+|\alpha|\omega_1')-f(z)\\ &= f(z+d\omega_1-b\omega_2)-f(z)=0,\end{aligned}$$

所以 $\lambda=0$,即 ω_1' 是 $f(z)$的周期.同理可证 ω_2' 也是 $f(z)$的周期.这就证明了所要的结论.

性质 2.2 设 $f(z)$和 $g(z)$是椭圆函数.再设复数

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \mathrm{Im}\,\omega_1/\omega_2>0 \tag{2.2}$$

是 $f(z)$和 $g(z)$的周期,那么,$f(z)$与 $g(z)$的和、差、积、商都是椭圆函数或常数.

证 显见,和、差、积、商一定是半纯的.如果不是常数,那么由于

有不共线的周期 ω_1 和 ω_2，所以必是椭圆函数.

定义 2.2　设 ω_1,ω_2 由式(2.2)给出. $\mathscr{E}(\omega_1,\omega_2)$表示所有以 ω_1,ω_2 为周期的椭圆函数及全体复数组成的集合. 由性质 2.1 和 2.2 知，$\mathscr{E}(\omega_1,\omega_2)$构成一个域，称为以 ω_1,ω_2 为周期的**椭圆函数域**.

显见 $\mathscr{E}(\omega_1,\omega_2)$是 $\boldsymbol{C}$ 上的线性空间. 要注意的是：对椭圆函数 $f(z)\in\mathscr{E}(\omega_1,\omega_2)$，$\omega_1,\omega_2$ 不一定是它的基本周期对.

性质 2.3　椭圆函数必有零点和极点.

证　设椭圆函数 $f(z)$的基本周期对是 ω_1,ω_2. 若它没有有限极点，则 $f(z)$是整函数，且在由式(1.16)给出的平行四边形 Π_0 上有界. 进而由周期性推出 $f(z)$在全平面有界，所以必为常数，矛盾. 若它没有零点，则由性质 2.1 知，椭圆函数 $1/f(z)$没有极点，这也不可能.

定义 2.3　椭圆函数的一个基本平行四边形称为是它的**正常基本平行四边形**，如果它的四条边上既没有极点也没有零点.

由于在有限区域上，椭圆函数只可能有有限个零点和极点，所以它的正常基本平行四边形是存在的. 显见，在正常基本平行四边形内部的零点和极点就完全刻画了椭圆函数在全平面上的零点和极点分布.

性质 2.4　椭圆函数 $f(z)$在它的一个正常基本平行四边形 Π_s 内的全部极点的留数和等于零. 因而，在一个正常基本平行四边形内至少有两个一级极点或一个不低于二级的的极点.

证　熟知，Π_s 内全部极点的留数和等于积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)\mathrm{d}z,$$

其中 L 是 Π_s 的边界，按反时针方向. 由周期性立即算出这积分等于 0. 由此及一级极点的留数不等于零，就推出余下的结论.

性质 2.5　椭圆函数 $f(z)$在它的一个正常基本平行四边形 Π_s 内，它的全部极点个数(按重数计)等于它的全部零点个数(按重数计). 全部极点(或零点)的个数(按重数计)称为是椭圆函数 $f(z)$的**阶**，记作 $N(f)$. 我们有

$$N(f)\geqslant 2. \tag{2.3}$$

证　设 N_1 和 N_2 分别是 $f(z)$ 在 Π_s 内的零点和极点个数(均按重数计). 由辐角原理知

$$N_1 - N_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz,$$

其中 L 是 Π_s 的边界,按反时针方向. 由周期性立即算出这积分为 0, 即 $N_1=N_2$. 式(2.3)由性质 2.4 推出.

性质 2.6　设椭圆函数 $f(z)$ 的基本周期对是 ω_1,ω_2,其阶为 N,在其正常基本平行四边形 Π_s 内的全部零点和全部极点(均按重数计)分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_N$. 那么,

$$(a_1+a_2+\cdots+a_N)-(b_1+b_2+\cdots+b_N)\in\Lambda, \qquad (2.4)$$

即

$$a_1+a_2+\cdots+a_N\equiv b_1+b_2+\cdots+b_N(\mathrm{mod}\,\Lambda), \qquad (2.5)$$

这里的格 $\Lambda=\Lambda(\omega_1,\omega_2)$ 由式(1.8)给出.

证　由留数定理可得

$$\sum_{j=1}^{N}a_j-\sum_{j=1}^{N}b_j=\frac{1}{2\pi i}\int_L z\frac{f'(z)}{f(z)}dz,$$

其中 L 是 Π_s 的边界,按反时针方向(见 §1 图 1.1). 利用周期性计算积分得

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi i}\int_L &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_s^{s+\omega_1}+\int_{s+\omega_1+\omega_2}^{s+\omega_2}\right\}+\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{s+\omega_1}^{s+\omega_1+\omega_2}+\int_{s+\omega_2}^{s}\right\}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_s^{s+\omega_1}-\int_{s+\omega_2}^{s+\omega_1+\omega_2}\right\}+\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{s+\omega_1}^{s+\omega_1+\omega_2}-\int_{s}^{s+\omega_2}\right\}\\ &=-\frac{\omega_2}{2\pi i}\int_s^{s+\omega_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\frac{\omega_1}{2\pi i}\int_s^{s+\omega_2}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.\end{aligned}$$

由于 $f(z)$ 在点 s 到 $s+\omega_j(j=1,2)$ 这两条直线上没有零点和极点,所以可取定一支 $\log f(z)$. 因而有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_s^{s+\omega_j}\frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_s^{s+\omega_j}d\log f(z)\\ &=\frac{1}{2\pi i}\{\log f(s+\omega_j)-\log f(s)\}=k_j\in\mathbf{Z}, \quad j=1,2,\end{aligned}$$

最后一步是由于 $f(s+\omega_j)=f(s)$. 综合以上各式就证明了所要的结论.

附注 性质 2.4,2.5 和 2.6 作如下推广后结论仍成立：把条件中的正常基本平行四边形代之以任一这样的平行四边形：

$$s + r_1\rho_1 + r_2\rho_2, \quad 0 \leqslant r_1 < 1, \quad 0 \leqslant r_2 < 1,$$

其中 ρ_1, ρ_2 是任意取定的 $f(z)$ 的两个不共线的周期（不一定是基本周期对），复数 s 选取得使在上述平行四边形的边界上没有零点和极点. 具体讨论留给读者.

如何具体构造椭圆函数呢？对给定的格 Λ 及半纯函数 $g(z)$，如不考虑收敛性，从形式上看

$$\sum_{\omega \in \Lambda} g(z - \omega), \quad \prod_{\omega \in \Lambda} g(z - \omega),$$

以及其他的对称组合，都可能是椭圆函数. 现取 $g(z) = z^{-k}$. 我们来证明

定理 2.7 设整数 $k \geqslant 3$，Λ 是格. 那么，函数

$$F_k(z) = F_k(z;\Lambda) = \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^k} \tag{2.6}$$

是 k 阶椭圆函数；有且仅有的极点是格点 $\omega \in \Lambda$，阶数均为 k；它的周期集合是 Λ. 此外，当 k 是偶数时它是偶函数，当 k 是奇数时它是奇函数.

为了证明级数(2.6)的收敛性，先来证明两个引理.

引理 2.8 设 Λ 是格，λ 是实数. 那么，级数

$$G(\Lambda;\lambda) = \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \frac{1}{|\omega|^\lambda} \tag{2.7}$$

当且仅当 $\lambda > 2$ 时收敛.

证 设 ω_1, ω_2 是 Λ 的一组基. 显见，对正整数 k，所有满足条件

$$\max(|m_1|, |m_2|) \leqslant k$$

的格点 $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ 的个数等于 $(2k+1)^2$. 因此，满足条件

$$\max(|m_1|, |m_2|) = k \tag{2.8}$$

的格点 $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ 的个数等于

$$(2k + 1)^2 - (2(k - 1) + 1)^2 = 8k. \tag{2.9}$$

显见，满足条件(2.8)的格点就是位于以 $\pm k\omega_1$、$\pm k\omega_2$ 这四点构成的平行四边形的四边上的格点. 设当 $k=1$ 时这一平行四边形的四边到原点的最小距离为 r，最大距离为 R. 由相似性推出，对满足条件

(2.8) 的格点有

$$kr \leqslant |m_1\omega_1 + m_2\omega_2| \leqslant kR, \quad \max(|m_1|,|m_2|) = k. \tag{2.10}$$

由于

$$G(\Lambda;\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1,m_2\in \mathbf{Z} \\ \max(|m_1|,|m_2|)=k}} \frac{1}{|m_1\omega_1 + m_2\omega_2|^{\lambda}},$$

利用式(2.9)和(2.10)得

$$\frac{8}{R^{\lambda}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\lambda-1}} \leqslant G(\Lambda;\lambda) \leqslant \frac{8}{r^{\lambda}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\lambda-1}}.$$

这就证明了引理.

引理 2.9　设 Λ 是格，$\lambda>2$，及 $D>0$. 那么，级数

$$\sum_{D<|\omega|,\omega\in\Lambda} \frac{1}{|z-\omega|^{\lambda}}$$

在 $|z|\leqslant D$ 上一致收敛.

证　由于在有限区域上只有有限个格点 ω，所以必有 $d>0$，使得当 $|z|\leqslant D<|\omega|$ 时有 $|z-\omega|\geqslant d>0$. 因而，当 $|z|\leqslant D<|\omega|$ 时有

$$\left|\frac{z-\omega}{\omega}\right| \geqslant \frac{d}{D+d}.$$

由此得

$$\sum_{D<|\omega|,\omega\in\Lambda} \frac{1}{|z-\omega|^{\lambda}} \leqslant \left(\frac{D+d}{d}\right)^{\lambda} \sum_{D<|\omega|,\omega\in\Lambda} \frac{1}{|\omega|^{\lambda}}.$$

从上式及引理 2.8 就推出所要的结论.

定理 2.7 的证明　由引理 2.9 推出：式(2.6)中的级数在任一不包含格 Λ 的点的有限闭区域上绝对一致收敛，所以 $F_k(z)$ 是半纯函数，以且仅以 $\omega\in\Lambda$ 为其极点，阶数均为 k，以及所有的 $0\neq\omega\in\Lambda$ 都是其周期. 再设 τ 是 $F_k(z)$ 的周期. 由于 0 是极点，所以 τ 也是极点，因而 $\tau\in\Lambda$. 这就证明了前半部分结论. 由格 Λ 是一个加法群，就立即推出关于奇偶性的结论. 证毕.

由于 $F_k(z)$ 的极点的阶 $k\geqslant 3$，留数为零，所以当 z_0 不是极点时，积分

$$\int_{z_0}^{z} F_k(z)\mathrm{d}z$$

与路径无关,且有

$$\int_{z_0}^{z} F_k(z)\mathrm{d}z = \frac{-1}{k-1}\sum_{\omega\in\Lambda}\left(\frac{1}{(z-\omega)^{k-1}} - \frac{1}{(z_0-\omega)^{k-1}}\right),$$

其中右边的级数在任一不包含 $\omega\in\Lambda$ 的有限闭区域上绝对一致收敛(为什么). 当 $k\geqslant 4$ 时,对 z_0 不是极点就有

$$\int_{z_0}^{z} F_k(z)\mathrm{d}z = \frac{-1}{k-1}(F_{k-1}(z) - F_{k-1}(z_0)),$$

及

$$F'_{k-1}(z) = -(k-1)F_k(z). \tag{2.11}$$

当 $k\geqslant 3, z_0=\tau\in\Lambda$ 是极点时,积分

$$\int_{\tau}^{z}\left(F_k(z) - \frac{1}{(z-\tau)^k}\right)\mathrm{d}z$$

与路径无关,且有

$$\int_{\tau}^{z}\left(F_k(z) - \frac{1}{(z-\tau)^k}\right)\mathrm{d}z$$
$$= \frac{-1}{(k-1)}\sum_{\tau\neq\omega\in\Lambda}\left(\frac{1}{(z-\omega)^{k-1}} - \frac{1}{(\tau-\omega)^{k-1}}\right),$$

其中右边的级数在任一不包含 $\omega\in\Lambda, \omega\neq\tau$ 的有限闭区域上绝对一致收敛(证明留给读者). 对 $k\geqslant 3$ 及 $\tau\in\Lambda$,我们记

$$\wp_{k-1}(z;\tau) = \wp_{k-1}(z;\Lambda,\tau)$$
$$= \frac{1}{(z-\tau)^{k-1}} + \sum_{\tau\neq\omega\in\Lambda}\left(\frac{1}{(z-\omega)^{k-1}} - \frac{1}{(\tau-\omega)^{k-1}}\right). \tag{2.12}$$

这样,当 $k\geqslant 4$ 时有

$$\wp_{k-1}(z;\tau) = F_{k-1}(z) - \sum_{\tau\neq\omega\in\Lambda}\frac{1}{(\tau-\omega)^{k-1}}. \tag{2.13}$$

当 $k=3, \tau=0$ 时,记

$$\wp(z) = \wp(z;\Lambda) = \wp_2(z;\Lambda,0)$$
$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{0\neq\omega\in\Lambda}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right). \tag{2.14}$$

这是一个十分重要的函数,称为 Weierstrass $\wp$函数. 利用以上讨论,容易证明(留给读者)

定理 2.10　$\wp(z)$是二阶椭圆函数,偶函数,有且仅有的极点是格点 $\omega\in\Lambda$,阶数均为 2,以且仅以 $0\neq\omega\in\Lambda$ 为它的周期,即 ω_1,ω_2 是它的基本周期对,以及

$$\wp'(z)=-2F_3(z) \tag{2.15}$$

是三阶椭圆函数.

§3　Weierstrass $\wp$ 函数和椭圆函数域

本节讨论 Weierstrass $\wp$函数(见式(2.14))的性质.

定理 3.1　$\wp'(z)=\wp'(z;\Lambda)$是三阶椭圆函数,是奇函数,以及在其基本平行四边形 $\Pi_0=\Pi_0(\omega_1,\omega_2)$(见式(1.16))上仅有的三个零点是:$\omega_1/2,\omega_2/2$ 和$(\omega_1+\omega_2)/2$,且都是一级零点.

证　由式(2.15),定理 2.7,性质 2.1 和 2.5 知,只要证明所给的这些点是 $\wp'(z)$ 的三个零点.由$\wp'(z)$是奇函数知,对任$-\omega\in\Lambda$有

$$\wp'(-z+\omega)=\wp'(-z)=-\wp'(z).$$

当 $\omega/2$ 不是极点时,取 $z=\omega/2$ 即得$\wp'(\omega/2)=0$.由此及 $\omega_1/2,\omega_2/2$ 和$(\omega_1+\omega_2)/2$ 都不是极点,就推出所要的结论.

推论 3.2　对于任意的复数 $c\neq\infty$, $\wp(\omega_1/2),\wp(\omega_2/2)$以及$\wp((\omega_1+\omega_2)/2)$,$\wp(z)=c$ 在其基本平行四边形 Π_0 上有且仅有两个不同的解 z_1,z_2,且满足

$$z_1\equiv-z_2(\bmod\ \Lambda); \tag{3.1}$$

当 $c=\infty$, $\wp(\omega_1/2),\wp(\omega_2/2)$或$\wp((\omega_1+\omega_2)/2)$时,$\wp(z)=c$ 在 Π_0 上仅有一解,相应为 $z=0,\omega_1/2,\omega_2/2$ 或$(\omega_1+\omega_2)/2$.

证　当 $c=\infty$时,结论显然成立.当 $c\neq\infty$时,由性质 2.1 及定理 2.10 知,$\wp(z)-c$ 是二阶椭圆函数、偶函数及周期集合仍为 Λ.故它在 Π_0 上的零点个数(按重数计)为 2.设为 z_1,z_2.当 $z_1=z_2$ 时, z_1 是$\wp(z)-c$ 的二阶零点,由定理 3.1 知,这当且仅当 $z_1=\omega_1/2,\omega_2/2$ 或$(\omega_1+\omega_2)/2$ 时成立.因此这时相应地有 $c=\wp(\omega_1/2),\wp(\omega_2/2)$或$\wp((\omega_1+\omega_2)/2)$.显见这时亦有式(3.1)成立.当 $z_1\neq z_2$ 时,必有 $z_1\neq\omega_1/2,\omega_2/2$ 和$(\omega_1+\omega_2)/2$,所以(为什么)

$$2z_1 \not\equiv 0 (\bmod \Lambda),$$

且必有 $\omega\in\Lambda$ 使 $\omega-z_1\in\Pi_0$. 由此及$\wp(z)$是偶函数推出：$\wp(\omega-z_1)=\wp(z_1)=c$. 由此及上式就推出 $\omega-z_1=z_2$(为什么)，这就证明了式(3.1)成立.

定理 3.3 设 $r=\min\{|\omega|: 0\neq\omega\in\Lambda\}$. 那么，在区域 $0<|z|<r$ 中有 Laurent 展式：

$$\wp(z)=\wp(z;\Lambda)=z^{-2}+\sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)G_{2m+2}(\Lambda)z^{2m}, \quad (3.2)$$

$$\wp'(z)=\wp'(z;\Lambda)=-2z^{-3}+\sum_{m=1}^{\infty}2m(2m+1)G_{2m+2}(\Lambda)z^{2m-1}, \quad (3.3)$$

其中

$$G_n=G_n(\Lambda)=\sum_{0\neq\omega\in\Lambda}\frac{1}{\omega^n}, \quad n\geqslant 3 \quad (3.4)$$

称为(关于格 Λ 的)n **阶 Eisenstein 级数**.

证 由引理 2.8 知，式(3.4)中的级数当 $n\geqslant 3$ 时绝对收敛. 由于 $\omega\in\Lambda$ 时必有 $-\omega\in\Lambda$，所以

$$G_{2m+1}(\Lambda)=0, \quad m\geqslant 1. \quad (3.5)$$

当 $|z/\omega|<1$ 时，有

$$\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}=\frac{1}{\omega^2}\left\{\left(1-\frac{z}{\omega}\right)^{-2}-1\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{z^n}{\omega^{n+2}}.$$

由此及式(2.14)得(取 ω_1,ω_2 为 Λ 的一组基)：当 $0<|z|<r$ 时，有

$$\begin{aligned}\wp(z)&=\frac{1}{z^2}+\sum_{0\neq\omega\in\Lambda}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{z^n}{\omega^{n+2}}\\&=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{m_1,m_2\in Z\\ \max(|m_1|,|m_2|)=k}}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{z^n}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^{n+2}},\end{aligned}$$

由式(2.8)～(2.10)知，当 $|z|<r$ 时，上式右边的级数绝对收敛，所以可交换求和号，再利用式(3.5)就推出式(3.2). 对式(3.2)两边求导即得式(3.3).

$\wp(z)$和$\wp'(z)$以且仅以 $\omega\in\Lambda$ 为它们的极点，因此，由它们构成的多项式一定满足(为什么)：(i) $\omega\in\Lambda$ 一定是周期；(ii) 仅可能以

属于 Λ 的 ω 为极点，而且要么没有极点，要么所有的 $\omega\in\Lambda$ 都是极点. 这样，由性质 2.3 知，如果我们能构造一个这样的多项式，使它在 $z=0$ 解析（即在 $z=0$ 处的各极点互相抵消），那么，这多项式必为常数. 这就是下面的定理.

定理 3.4 $\wp(z)$和$\wp'(z)$满足关系式

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6. \qquad (3.6)$$

这也就是说，$w=\wp(z)$满足微分方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^2 = 4w^3 - 60G_4w - 140G_6, \qquad (3.7)$$

亦即复三次曲线（亦称椭圆曲线）

$$y^2 = 4x^3 - 60G_4x - 140G_6, \quad x,y\in \boldsymbol{C} \qquad (3.8)$$

在复数域上有参数解：

$$y = \wp'(z), \quad x = \wp(z), \quad z\in\boldsymbol{C}. \qquad (3.9)$$

证 由式(3.2)和(3.3)得

$$(\wp'(z))^2 = 4z^{-6} - 24G_4z^{-2} - 80G_6 + z^2f_1(z),$$

$$(\wp(z))^2 = z^{-4} + 6G_4 + z^2f_2(z),$$

$$(\wp(z))^3 = z^{-6} + 9G_4z^{-2} + 15G_6 + z^2f_3(z),$$

其中 $f_1(z)$，$f_2(z)$和 $f_3(z)$在 $z=0$ 解析. 由以上三式及式(3.2)得

$$(\wp'(z))^2 - \{4(\wp(z))^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6\} = z^2f_4(z),$$

其中 $f_4(z)$在 $z=0$ 解析. 因此，由定理前的说明知 $z^2f_4(z)$必为常数，所以恒等于零. 这就证明了式(3.6)及其他结论.

定理 3.4 揭示了$\wp$函数与一类微分方程及与一类代数曲线的联系，这是十分重要的. 定理也表明$\wp(z)$完全由 G_4 和 G_6 所确定，因而由式(3.2)知，也应该完全确定所有的 G_{2m}. 事实上对式(3.6)求导得到$\wp''(z)=6(\wp(z))^2-30G_4$. 由此及定理 3.3，比较两边系数就推出

定理 3.5 对 $m\geqslant 4$ 有递推公式

$$(2m+1)(2m-1)(m-3)G_{2m} = 3\sum_{r=2}^{m-2}(2r-1)(2m-2r-1)G_{2r}G_{2m-2r}.$$

由定理 3.1 和定理 3.4 可得下面的重要结论.

定理 3.6 设

$$g_2 = 60G_4, \quad g_3 = 140G_6, \tag{3.10}$$

以及

$$e_1 = \wp(\omega_1/2), \quad e_2 = \wp(\omega_2/2), \quad e_3 = \wp((\omega_1 + \omega_2)/2). \tag{3.11}$$

那么,e_1,e_2,e_3 两两不等,且有

$$f(x) = 4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3). \tag{3.12}$$

因而,$f(x)$的判别式

$$\Delta(f) = -64(g_2^3 - 27g_3^2) \neq 0.$$

证 先证 $e_1 \neq e_2$. 若 $e_1 = e_2 = e$,则由定理 3.1 知$\wp(z)-e$ 有两个二级零点 $\omega_1/2,\omega_2/2$. 另一方面,由性质 2.1 和 2.5 知,$\wp(z)-e$ 是二阶椭圆函数,基本周期对仍是 ω_1,ω_2. 由于 $\omega_1/2$ 和 $\omega_2/2$ 均在基本平行四边形 $\Pi_0(\omega_1,\omega_2)$ 上,所以$\wp(z)-e$ 在 Π_0 上的零点个数(按重数计)不小于 4,这和性质 2.5 矛盾. 类似可证 $e_1 \neq e_3, e_2 \neq e_3$. 由此及定理 3.1 和 3.4 就推出式(3.12)成立,且 $f(x)$的判别式不等于零. 熟知,$f(x)$的判别式是

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -g_2 & -g_3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -g_2 & -g_3 \\ 12 & 0 & -g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & -g_2 \end{vmatrix} = -64(g_2^3 - 27g_3^2).$$

证毕.

通常,不计因子-64,记

$$\Delta(\Lambda) = (g_2^3 - 27g_3^2), \tag{3.13}$$

称为是**格 Λ 的判别式**,定理 3.6 证明了它一定不等于零.

对一般的判别式不等于零的复三次曲线:

$$y^2 = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0, \quad \Delta(f) \neq 0,$$

作线性变换 $x=(4/a)^{1/3}u-b/(3a)$,就变为

$$y^2 = g(u) = 4u^3 - c'u - d', \quad \Delta(g) \neq 0.$$

这就是式(3.8)的形式. 如果存在一个格 Λ,使得

$$c' = 60G_4(\Lambda), \quad d' = 140G_6(\Lambda),$$

那么,这种一般的复三次曲线的求解就由定理 3.4 完全解决了.这样的格是否一定存在呢? 回答是肯定的,这将在定理 18.4 中证明.

下面进一步来讨论复数域上的三次曲线(3.8)及其参数解(3.9).

定理 3.7 设 ω_1,ω_2 是格 Λ 的一组基.那么,参数解(3.9)给出了由式(3.8)确定的复三次曲线 $\mathscr{L}$ 上的点 (x,y) 到格 Λ 的基本平行四边形 Π_0 上的点 z 之间的一个一一对应,其中曲线上的无穷远点 $(x,y)=(\infty,\infty)$ 对应于点 $z=0$.

证 曲线(3.8)上仅有一个无穷远点 $x=y=\infty$,而参数解(3.9)在 $z\in\Pi_0$ 上当且仅当 $z=0$ 时给出一个无穷远点(为什么),这就证明了无穷远点 $(x,y)=(\infty,\infty)$ 和点 $z=0$ 之间对应的惟一性.下面来讨论曲线 $\mathscr{L}$ 上的有限点 (x,y) 和 Π_0 上的点 $z\neq 0$ 之间的对应关系.先来证明在对应(3.9)下,Π_0 上均不为零的不同的两个点 z_1,z_2,必对应 $\mathscr{L}$ 上的不同的点,即

$$(\wp(z_1),\wp'(z_1)) \neq (\wp(z_2),\wp'(z_2)),$$

$$z_1 \neq z_2 \in \Pi_0, \quad z_1z_2 \neq 0.$$

若 $\wp(z_1)\neq\wp(z_2)$,则结论成立;若 $\wp(z_1)=\wp(z_2)$,由推论 3.2 知必有 $z_2\equiv -z_1 \pmod{\Lambda}$,所以 $\wp'(z_2)=-\wp'(z_1)$.因此,$\wp'(z_2)=\wp'(z_1)$ 当且仅当 $\wp'(z_1)=0$.由定理 3.1 知,这时必有 $z_1=\omega_1/2,\omega_2/2$ 或 $(\omega_1+\omega_2)/2$.进而由推论 3.2 知 $z_2=z_1$,矛盾.这就证明了所要的结论.

这样,剩下的是只要证明:曲线 $\mathscr{L}$ 上的任一有限点 (x_1,y_1),必有 $z_1\in\Pi_0$ 使得 $x_1=\wp(z_1)$,$y_1=\wp'(z_1)$.由推论 3.2 知,必有 $z_1\in\Pi_0$ 使得 $x_1=\wp(z_1)$.由定理 3.4 知点 $(x_1,\wp'(z_1))$ 在曲线 $\mathscr{L}$ 上.另一方面,对给定的 x_1,曲线 $\mathscr{L}$ 上可能有的横坐标为 x_1 的点是 $(x_1,\pm y_1)$(为什么),因此

$$y_1 = \wp'(z_1) \quad 或 \quad -\wp'(z_1)(=\wp'(-z_1))$$

至少有一个成立.若 $y_1=\wp'(z_1)$,则 z_1 即为所求;若 $y_1=\wp'(-z_1)$,则取点 $z_2\in\Pi_0$ 满足 $z_2\equiv -z_1 \pmod{\Lambda}$,$z_2$ 即为所求.证毕.

综合以上讨论,在对应式(3.9)下,椭圆曲线 $\mathscr{L}$ 上的点 (x,y) 和

基本平行四边形 $\Pi_0(\omega_1,\omega_2)$ 上的点 z 之间有如下的一一对应关系：

$$\begin{cases}(\infty,\infty)\longleftrightarrow 0,\\ (\wp(z),0)\longleftrightarrow z,\ z=\omega_1/2,\omega_2/2,\text{或}(\omega_1+\omega_2)/2,\\ (\wp(z),\wp'(z))\longleftrightarrow z,\ z\neq 0,\omega_1/2,\omega_2/2,\text{或}(\omega_1+\omega_2)/2,\\ (\wp(z'),\wp'(z'))=(\wp(z),-\wp'(z))\longleftrightarrow z',\ z'\in\Pi_0,\\ \qquad z'\equiv -z(\mathrm{mod}\,\Lambda),z\neq 0,\omega_1/2,\omega_2/2,\text{或}(\omega_1+\omega_2)/2.\end{cases} \tag{3.14}$$

这表明椭圆曲线(3.8)和一维复流形——环面 $\Lambda\backslash C=\Pi_0$ 之间存在一一的解析对应(3.9). 为了更清楚地讨论代数曲线,特别是它的无穷远点,需要引进所谓的射影坐标,这在任意一本代数曲线的教材中都能找到,这里不予讨论.

Π_0 中的点在模 Λ 的加法下构成加法交换群,而椭圆曲线 $\mathscr{L}$ 上的点(包括无穷远点)在对应(3.9)(即(3.14))下,与 Π_0 上的点有一一对应的关系. 对 $z\in\Pi_0$,记 $\mathscr{L}$ 上的对应点为

$$P_z=(\wp(z),\wp'(z)). \tag{3.15}$$

一般的,当 $z\in C$ 时,P_z 仍由式(3.15)给出. 这样,显然有

$$P_z=P_w,\quad z\equiv\omega(\mathrm{mod}\,\Lambda). \tag{3.16}$$

通过这种对应,由 Π_0 中(即 C 中)的模 Λ 的加法可以来定义,即诱导出曲线 $\mathscr{L}$ 上的点的一种"加法"运算,记作$\oplus$,即定义

$$P_{z_1}\oplus P_{z_2}\overset{\text{def}}{=\!=}P_{z_1+z_2}=(\wp(z_1+z_2),\wp'(z_1+z_2)). \tag{3.17}$$

容易验证,在这样定义的"加法"$\oplus$下,$\mathscr{L}$ 上的点构成一个加法交换群. 它的零元素是 $P_0=(\infty,\infty)$,即 $\mathscr{L}$ 上的无穷远点. P_z 的逆元素 $-P_z$,设为 P_w,应满足

$$P_0=P_z\oplus P_w=(\wp(z+w),\wp'(z+w)),$$

所以,w 由下式惟一确定:

$$z+w\equiv 0(\mathrm{mod}\,\Lambda),\quad w\in\Pi_0,$$

即

$$-P_z=P_{-z}. \tag{3.18}$$

容易证明(留给读者):当 $z=0,\omega_1/2,\omega_2/2$ 或 $(\omega_1+\omega_2)/2$ 时,P_z 的逆元素均为自身. 一般的,若 z 是 Λ 的 N 阶点(见定义 1.7),则 P_z 的

逆元素 $P_{-z}=P_{(N-1)z}$.

现在来讨论这样的问题：对给定的 $P_{z_1},P_{z_2}\in\mathscr{L}$，能否给出其和 $P_{z_1+z_2}$ 与 P_{z_1},P_{z_2} 之间的明确关系. 当 z_1,z_2 至少有一为零，或 $z_1+z_2\equiv 0(\mathrm{mod}\ \Lambda)$ 时是显然的. 在一般情形下，有下面的

定理 3.8（椭圆函数的加法公式） 在定理 3.7，式(3.15)和(3.17)的符号下，设

$$z_1,z_2\in \Pi_0,\quad z_1z_2\neq 0,\quad z_1+z_2\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ \Lambda),\qquad(3.19)$$

及复三次曲线 $\mathscr{L}$ 上的点 $P_1=P_{z_1},P_2=P_{z_2}$，与它们的和 $P=P_{z_1+z_2}$. 那么，$-P$ 就是连结点 P_1 和 P_2 的复直线(当 $P_1=P_2$ 时是 $\mathscr{L}$ 在该点处的切线)与复三次曲线 $\mathscr{L}$ 的交点，并有以下的公式：

(i) 当

$$z_1\neq z_2\qquad(3.20)$$

时，有

$$\wp(z_1+z_2)=-\wp(z_1)-\wp(z_2)+(1/4)\{(\wp'(z_1)-(\wp'(z_2))/(\wp(z_1)-\wp(z_2))\}^2;\qquad(3.21)$$

(ii) 当

$$z_1=z_2\qquad(3.22)$$

时，有

$$\wp(2z_1)=-2\wp(z_1)+(1/4)\{\wp''(z_1)/\wp'(z_1)\}^2.\qquad(3.23)$$

证 记 $x_j=\wp(z_j),y_j=\wp'(z_j),j=1,2$. 由条件(3.19)和(3.20)知，连结点 P_1 和 P_2 的复直线方程是

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=m=\frac{\wp'(z_2)-\wp'(z_1)}{\wp(z_2)-\wp(z_1)},\qquad(3.24)$$

把它记为 $y=mx+b$. 这直线和曲线 $\mathscr{L}$ 的交点就是方程组

$$\begin{cases}y=mx+b,\\ y^2=f(x)=4x^3-60G_4x-140G_6\end{cases}$$

的解. 显见，x 必须满足方程 $(mx+b)^2=4x^3-60G_4x-140G_6$. 由代数基本定理知，这方程的解数为 3(可以出现重根)，且已知两个不同的解 x_1,x_2. 设第三个解为 x_3，它满足

$$x_1+x_2+x_3=m^2/4.\qquad(3.25)$$

相应于 x_3 的曲线 $\mathscr{L}$ 与直线(3.24)的第三个交点为 (x_3,y_3)，$y_3=$

mx_3+b. 设 $z_3\in\Pi_0$, $x_3=\wp(z_3)$, $y_3=\wp'(z_3)$, 即 $P_{z_3}=(x_3,y_3)$. 这样，就得到了直线(3.24)与 $\mathscr{L}$ 的全部交点 P_{z_1}, P_{z_2}, 及 P_{z_3}, 且当 $z=z_1,z_2,z_3$ 时，有

$$\wp'(z)-m\wp(z)-b=0. \qquad (3.26)$$

反过来，使上式成立的 $z\in\Pi_0$ 所确定的点 P_z 是直线(3.24)与 $\mathscr{L}$ 的交点. 因此，$z=z_1,z_2,z_3$ 是三阶椭圆函数 $\wp'(z)-m\wp(z)-b$ 在 Π_0 上的全部零点. 注意到它在 Π_0 中仅有的极点是 $z=0$，因而由性质 2.6 及其后的附注就推出

$$z_1+z_2+z_3\equiv 0(\mathrm{mod}\ \Lambda).$$

因而有

$$\begin{aligned} P_{z_1}\oplus P_{z_2}=P_{z_1+z_2}&=P_{-z_3}\\ &=(\wp(-z_3),\wp'(-z_3))\\ &=(x_3,-y_3). \end{aligned} \qquad (3.27)$$

从式(3.25)及(3.27)推出式(3.21)成立. 这就证明了满足条件(3.20)时定理成立.

条件(3.19)和(3.22)成立时，可以看做是 z_1+z_2 趋向于 z_1 的极限情形. 设曲线 $\mathscr{L}$ 在点 z_1 处的切线方程是 $y=m_1x+b_1$, $m_1=\wp''(z_1)/\wp'(z_1)$. 我们同样可以重复上面的讨论证明定理的结论及式(3.23)成立. 具体推导留给读者.

定理 3.8 的漂亮结论揭示了所定义的椭圆曲线上的点的'加法'的实质，它有明显的几何意义. 如果在实数域上讨论椭圆曲线，那么，它的点的'加法'可以清楚地用几何作图来实现(见图 3.1～3.4).

椭圆曲线的重要性在于许多著名的不定方程与其上的有理点有关. 本章的问题 20,21 就是关于同余数问题和椭圆曲线之间的联系(参看[NK]). 建议读者看关于椭圆曲线的通俗介绍文章：R. K. Guy, My favorite elliptic curve: a tale of two types of triangles, AMM, 102(1995), 771～781，以增加感性认识.

在本节最后，我们来证明椭圆函数域 $\mathscr{E}(\omega_1,\omega_2)$ 中的任一函数一定可用 $\wp(z)$ 和 $\wp'(z)$ 来表示. 证明的思想方法和定理 3.3 是一样的，但推导要复杂得多.

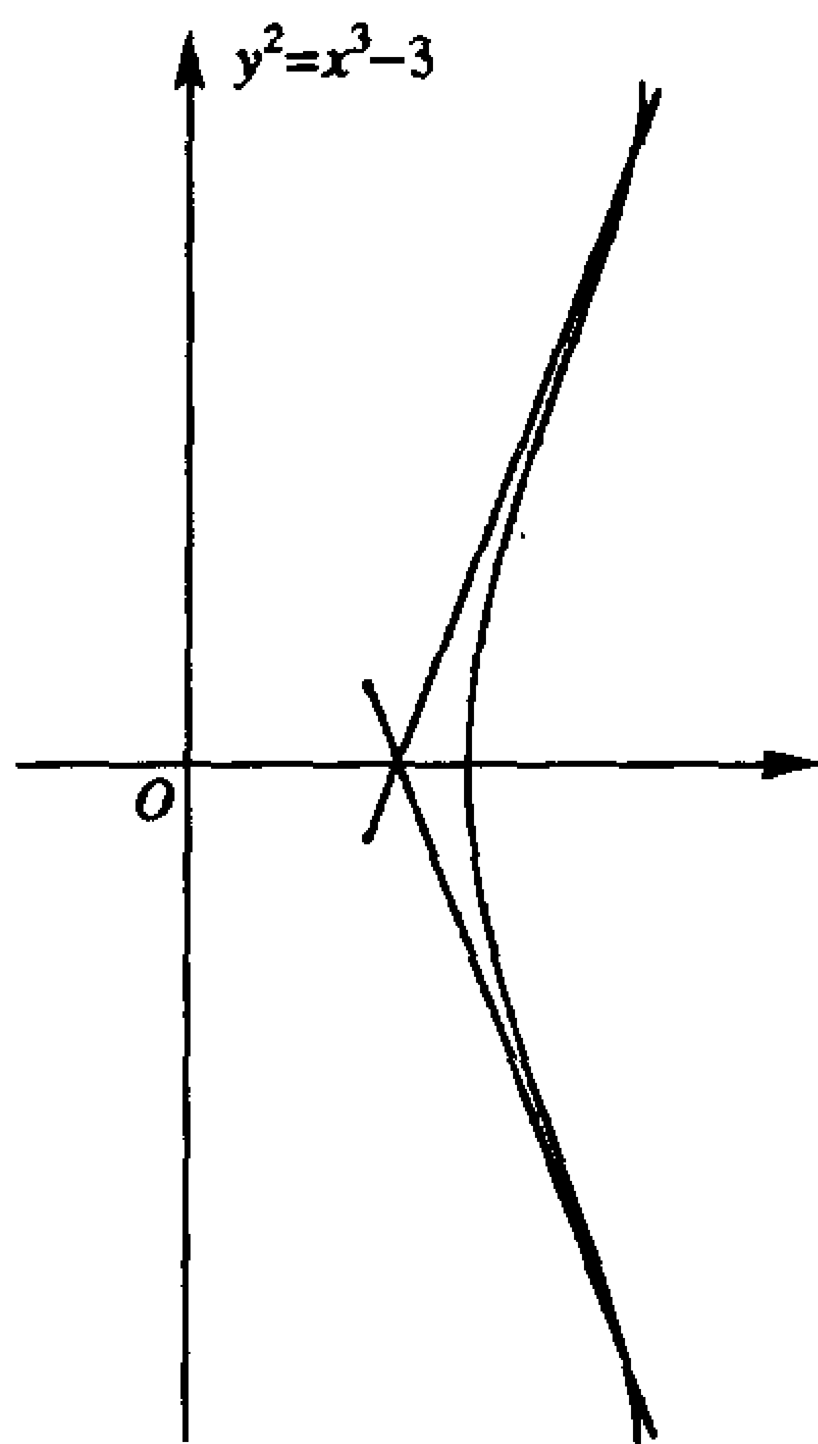


图 3.1

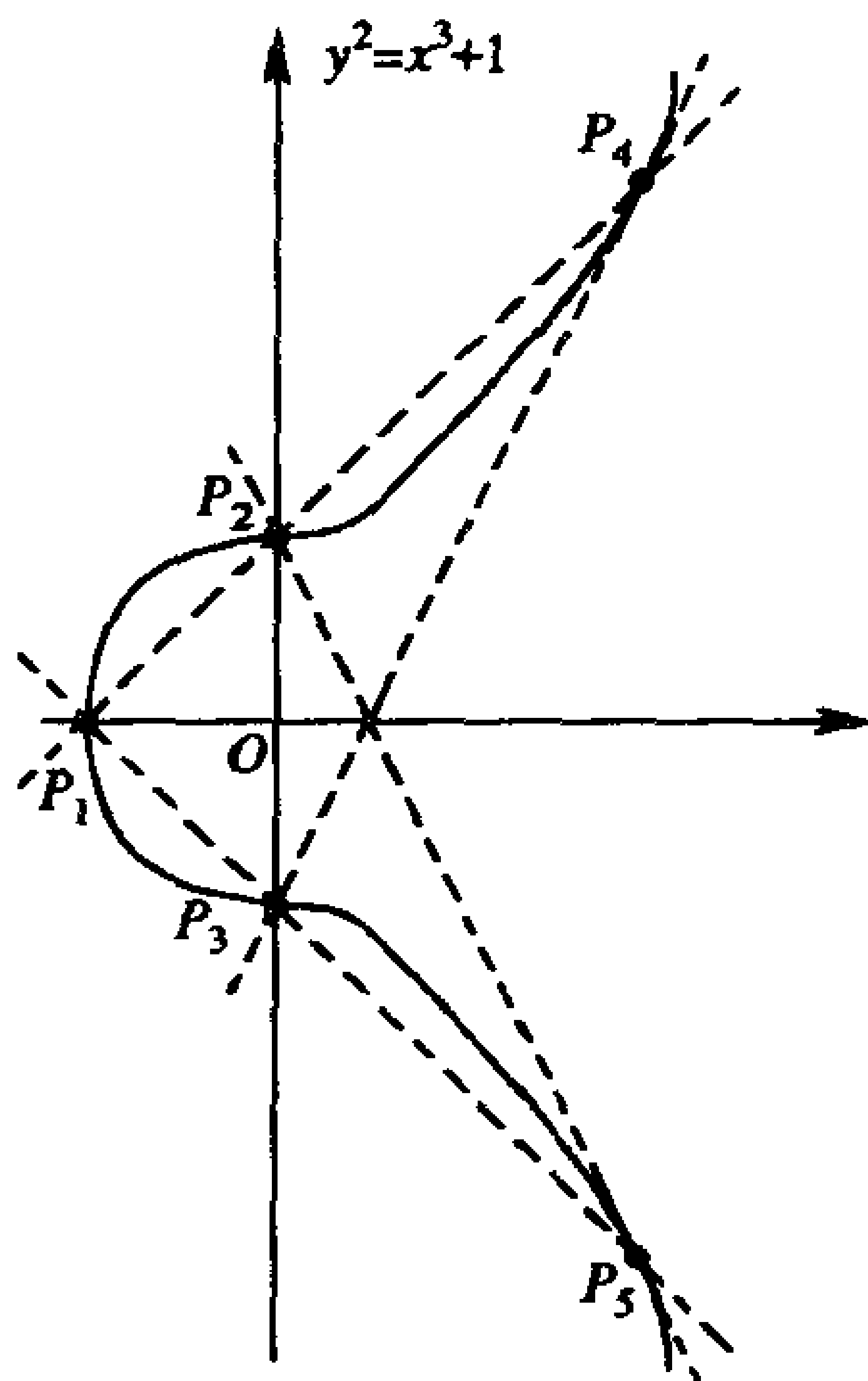


图 3.2

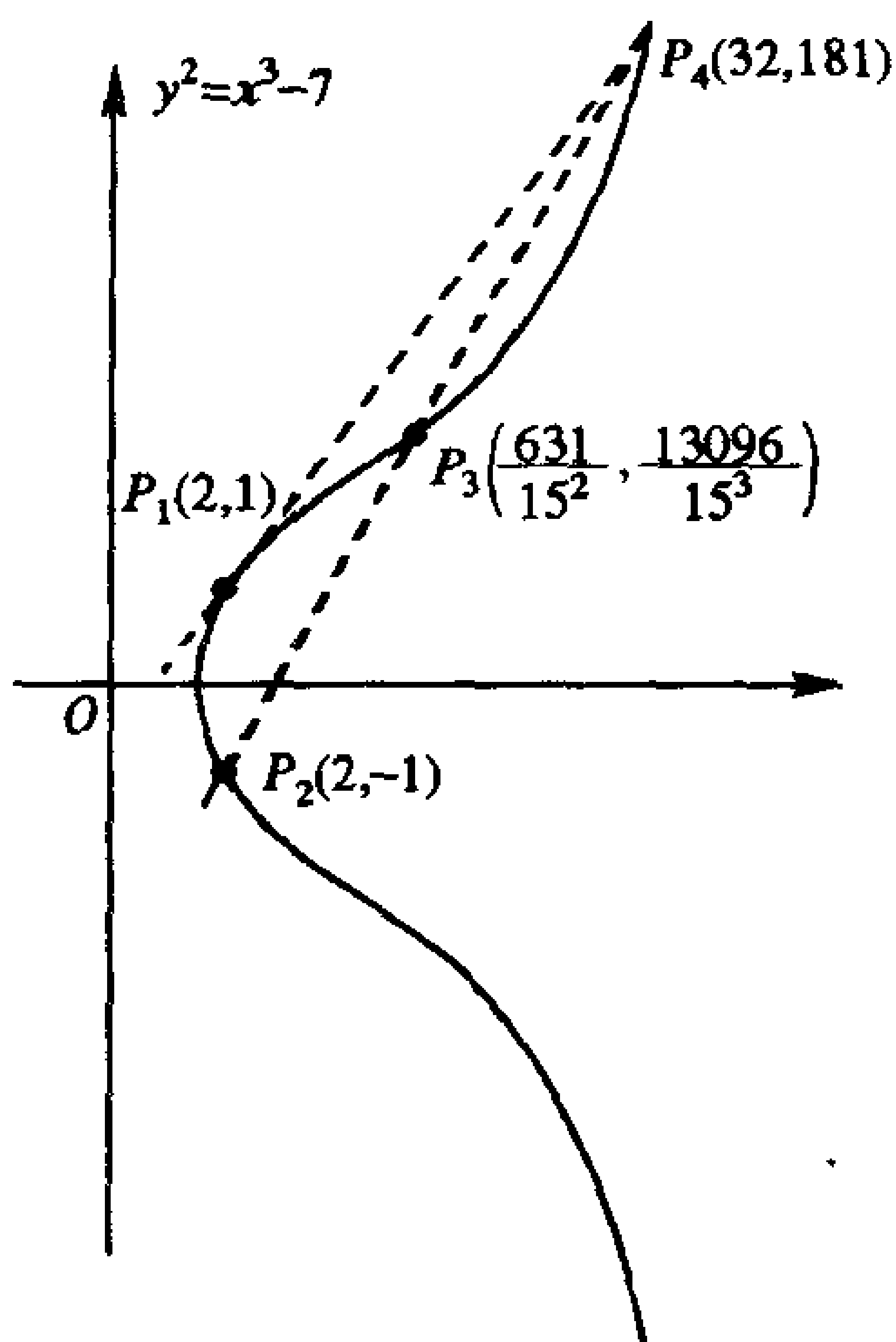


图 3.3

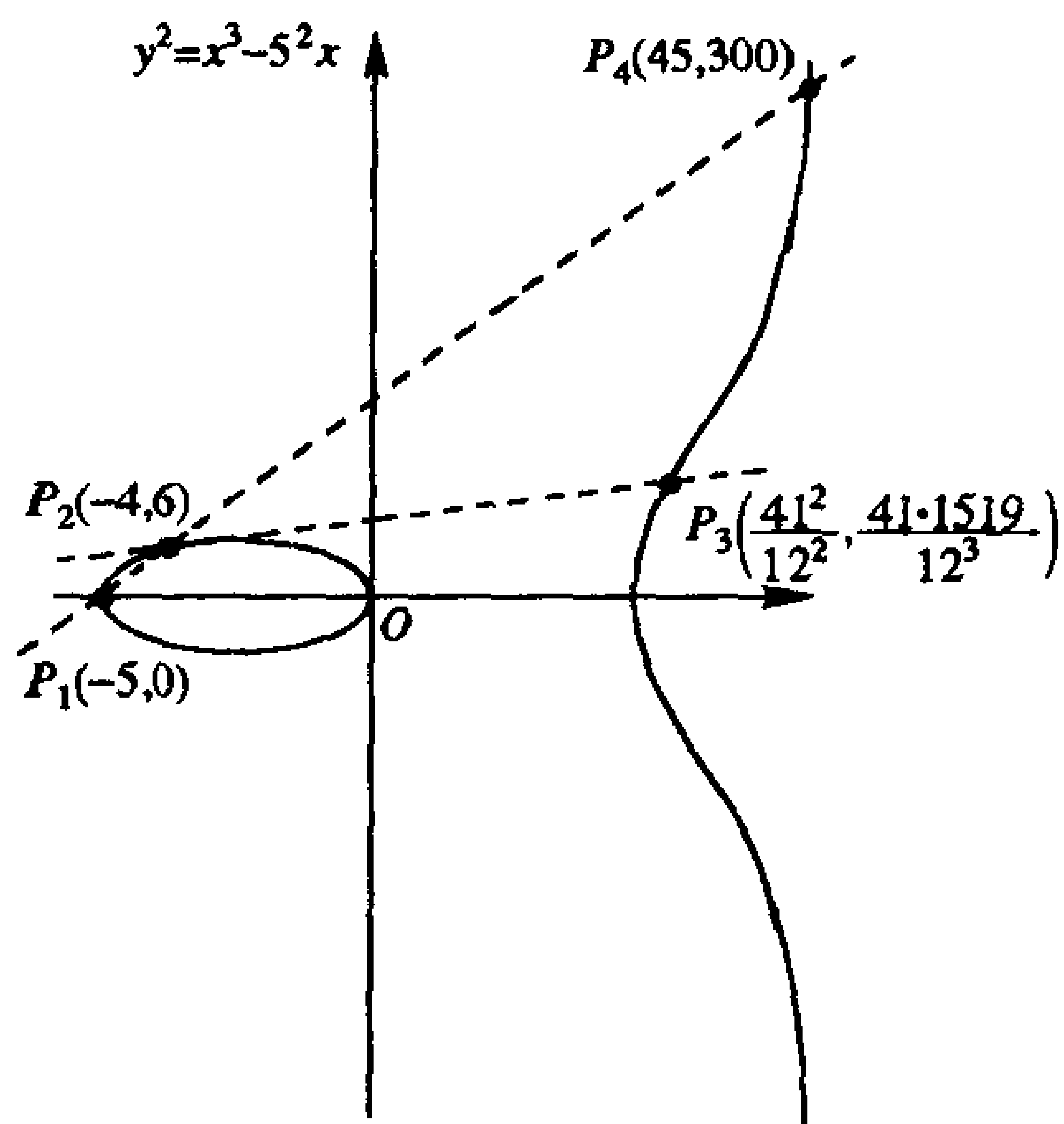


图 3.4

定理 3.9 设 ω_1,ω_2 满足式(2.2)，$f(z)\in\mathscr{E}(\omega_1,\omega_2)$. 那么，一定存在有理函数 H 和 K 使得

$$f(z)=H(\wp(z))+\wp'(z)K(\wp(z)),\qquad(3.28)$$

其中 $\wp(z)=\wp(z;\Lambda)$，格 $\Lambda=\Lambda(\omega_1,\omega_2)$.

证 由于 $f_1(z)=(f(z)+f(-z))/2$，$f_2(z)=(f(z)-f(-z))/(2\wp'(z))$都是偶函数(包括常数)，属于 $\mathscr{E}(\omega_1,\omega_2)$，以及

$$f(z)=f_1(z)+\wp'(z)f_2(z),$$

所以，不妨假定 $f(z)$是偶函数. 现考虑$\wp(z)$的基本平行四边形 $\Pi_0=\Pi_0(\omega_1,\omega_2)$(见式(1.16)). 设 $a\in\Pi_0$ 是 $f(z)$的极点，阶为 $m(a)$($m(a)$为负时是零点). 再设

$$f(z)=(z-a)^{-m(a)}g(z), \tag{3.29}$$

$g(z)$在点 a 解析且不等于零，现按 a 在 Π_0 中的位置分两种情形来讨论.(注意：Π_0 不一定是 $f(z)$的基本平行四边形.)

(i) $a=\omega_1/2,\omega_2/2$ 或$(\omega_1+\omega_2)/2$. 由于 $f(z)$是偶函数，$2a$ 是周期，故有

$$f(a+z)=f(-a-z)=f(a-z).$$

由此及式(3.29)得

$$g(a+z)=(-1)^{-m(a)}g(a-z).$$

令 $z\to0$ 就推出 $m(a)$是偶数. 由于，这时 $z=a$ 是二阶椭圆函数$\wp(z)-\wp(a)$在其基本平行四边形 Π_0 上的惟一的零点，阶为 2，所以

$$(\wp(z)-\wp(a))^{-m(a)/2}$$

在 Π_0 上仅有的极点是 $z=a$，阶为 $m(a)$.

(ii) $a\neq0,\omega_1/2,\omega_2/2$ 或$(\omega_1+\omega_2)/2$. 这时相应的点 a^* 也在 Π_0 上：

$$a^*=\begin{cases}\omega_1+\omega_2-a, & \text{当 } a \text{ 在 } \Pi_0 \text{ 内;}\\ \omega_1-a, & \text{当 } a=c\omega_1,0<c<1,c\neq1/2;\\ \omega_2-a, & \text{当 } a=c\omega_2,0<c<1,c\neq1/2.\end{cases}$$

显见，$a^*\neq a$ 及 $a^*\neq0,\omega_1,\omega_2$ 或$(\omega_1+\omega_2)/2$. 由于 $f(z)$是偶函数，所以

$$f(a^*+z)=f(-a+z)=f(a-z).$$

由此及式(3.29)知，点 a^* 也是 $f(z)$的 $m(a)$阶极点. 由于 $z=a$ 和 a^* 是二阶椭圆函数$\wp(z)-\wp(a)$($=\wp(z)-\wp(a^*)$)在其基本平行四边形 Π_0 上的仅有的两个不同的零点，阶数均为 1(为什么)，因而

$$(\wp(z)-\wp(a))^{-m(a)}$$

在 Π_0 上仅有两个不同的极点 $z=a$ 和 a^*，阶数均为 $m(a)$. 现取

$$M(z)=\left(\prod_{a\neq 0}(\wp(z)-\wp(a))^{-m(a)}\right)^{1/2},$$

其中连乘号表示对 $f(z)$ 在 Π_0 上除去 $a=0$ 外的所有零点和极点 a 求积. 这里要指出的是：当 a 属于情形(i)时 $m(a)$ 为偶数；当 a 属于情形(ii)时乘积中有两项

$$(\wp(z)-\wp(a))^{-m(a)}=(\wp(z)-\wp(a^*))^{-m(a^*)},$$

所以，总的指数定被 2 整除. 容易看出，在 Π_0 上除去 $z=0$ 外，$M(z)$ 和 $f(z)$ 有相同的零点和极点，且 $M(z)\in\mathscr{E}(\omega_1,\omega_2)$. 因此，以 ω_1 和 ω_2 为周期的半纯函数 $f(z)/M(z)$ 在 Π_0 上除 $z=0$ 外既无极点又无零点. 由性质 2.3 知必为常数. 证毕.

定理的证明表明：当 $f(z)$ 是偶函数时，一定可表为$\wp(z)$的有理函数. 此外，我们也一定可取$\wp(z)$和 $f(z)$有相同的周期集合.

§4 Theta 函 数

本节将简单介绍一类重要函数——Theta 函数，其目的是：(i) 通过它给出了另一个构造椭圆函数的方法；更主要的是(ii) 讨论特殊的 Theta 函数 $\theta(w)$（见式(4.19)）及 $\theta(w;\chi)$（见式(4.37)～(4.39)），它在模形式理论中是十分重要的.

在本节中始终用以下符号：

$$q=e^{\pi i w},\ w\in\boldsymbol{H};\quad z=e^{2\pi i s},\ s\in\boldsymbol{C}. \tag{4.1}$$

我们记

$$\begin{aligned}\Theta_1(s\,|\,w)&=-\mathrm{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{\pi i(n+1/2)^2 w}e^{\pi i(2n+1)s}\\&=-\mathrm{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}z^{(n+1/2)}\\&=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)\pi s;\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\Theta_2(s\,|\,w)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\pi i(n+1/2)^2 w}e^{\pi i(2n+1)s}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{(n+1/2)^2}z^{(n+1/2)}\\&=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+1/2)^2}\cos(2n+1)\pi s;\end{aligned}\tag{4.3}$$

$$\Theta_3(s|w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 w} e^{2\pi i n s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2\pi n s; \tag{4.4}$$

$$\Theta_4(s|w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i n^2 w} e^{2\pi i n s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^n$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2\pi n s. \tag{4.5}$$

它们都是两个复变数 $w\in \boldsymbol{H}, s\in \boldsymbol{C}$ 的函数，对固定的 $w\in \boldsymbol{H}$，是 s 的整函数，Θ_1 是 s 的奇函数，其他三个是偶函数；对固定的 $s\in \boldsymbol{C}$，是 $w\in \boldsymbol{H}$ 的解析函数(为什么). 简单地说，它们及由它们衍生的函数称为 Theta 函数.

设 $A=e^{-\pi i w}e^{-2\pi i s}$，容易验证(留给读者)由表 4.1 给出的等式.

表 4.1

$\Theta_1(s+1\|w)=-\Theta_1(s\|w)$	$\Theta_1(s+w\|w)=-A\Theta_1(s\|w)$
$\Theta_2(s+1\|w)=-\Theta_2(s\|w)$	$\Theta_2(s+w\|w)=A\Theta_2(s\|w)$
$\Theta_3(s+1\|w)=\Theta_3(s\|w)$	$\Theta_3(s+w\|w)=A\Theta_3(s\|w)$
$\Theta_4(s+1\|w)=\Theta_4(s\|w)$	$\Theta_4(s+w\|w)=-A\Theta_4(s\|w)$

再设 $B=e^{-\pi i w/4}e^{-\pi i s}$，还容易验证(留给读者)$\Theta_j$ 可以互相表示，这由表 4.2 给出.

表 4.2

	s	$s+1/2$	$s+w/2$	$s+(1+w)/2$
$\Theta_1(\cdot\|w)$	$\Theta_1(s\|w)$	$\Theta_2(s\|w)$	$iB\Theta_4(s\|w)$	$B\Theta_3(s\|w)$
$\Theta_2(\cdot\|w)$	$\Theta_2(s\|w)$	$-\Theta_1(s\|w)$	$B\Theta_3(s\|w)$	$-iB\Theta_4(s\|w)$
$\Theta_3(\cdot\|w)$	$\Theta_3(s\|w)$	$\Theta_4(s\|w)$	$B\Theta_2(s\|w)$	$iB\Theta_1(s\|w)$
$\Theta_4(\cdot\|w)$	$\Theta_4(s\|w)$	$\Theta_3(s\|w)$	$iB\Theta_1(s\|w)$	$B\Theta_2(s\|w)$

定理 4.1 对固定的 $w\in \boldsymbol{H}$，(i) s 的整函数 $\Theta_1(s|w)$ 的全部零点都是一级的，由格 $\Lambda(w,1)$ 给出；(ii) s 的整函数 $\Theta_2(s|w)$ 的全部零点都是一级的，由点集 $1/2+\Lambda(w,1)$ 给出；(iii) s 的整函数 $\Theta_3(s|w)$ 的全部零点都是一级的，由点集 $(1+w)/2+\Lambda(w,1)$ 给出；(iv) s 的整函数 $\Theta_4(s|w)$ 的全部零点都是一级的，由点集 $w/2+\Lambda(w,1)$ 给出.

证　我们来证(i),其他几个的证明是类似的,留给读者.由表 4.1 的第一行及式(4.2)立即推出 $\Theta_1(0|w)=\Theta_1(1|w)=\Theta_1(w|w)=0$,及格 $\Lambda(w,1)$的格点都是 $\Theta_1(s|w)$的零点.剩下还要证明除此之外 $\Theta_1(s|w)$ 没有别的零点.为此,只要证明 $\Theta_1(s|w)$在格 $\Lambda(w,1)$的基本平行四边形 $\Pi_0=\Pi_0(w,1)$(见式(1.16))上仅有的零点是 $s=0$(为什么).容易证明,一定存在 $\lambda=-r(1+w)$满足:$0<r<1/2$,使得 $\Theta_1(s|w)$在格 $\Lambda(w,1)$的基本平行四边形 $\Pi_\lambda=\lambda+\Pi_0(w,1)$(见式(1.17))的边界上没有 $\Theta_1(s|w)$的零点(为什么).显见,$s=0$ 在 Π_λ 内.这样,就变为要证明 $\Theta_1(s|w)$在格 $\Lambda(\omega,1)$的基本平行四边形 Π_λ 上仅有的零点是 $s=0$(为什么).设 $\Theta_1(s|w)$在 Π_λ 上的零点个数(按重数计)为 N.显然有

$$N=(2\pi\mathrm{i})^{-1}\int_{abcd}\frac{\Theta_1'(s|w)}{\Theta_1(s|w)}\mathrm{d}s,$$

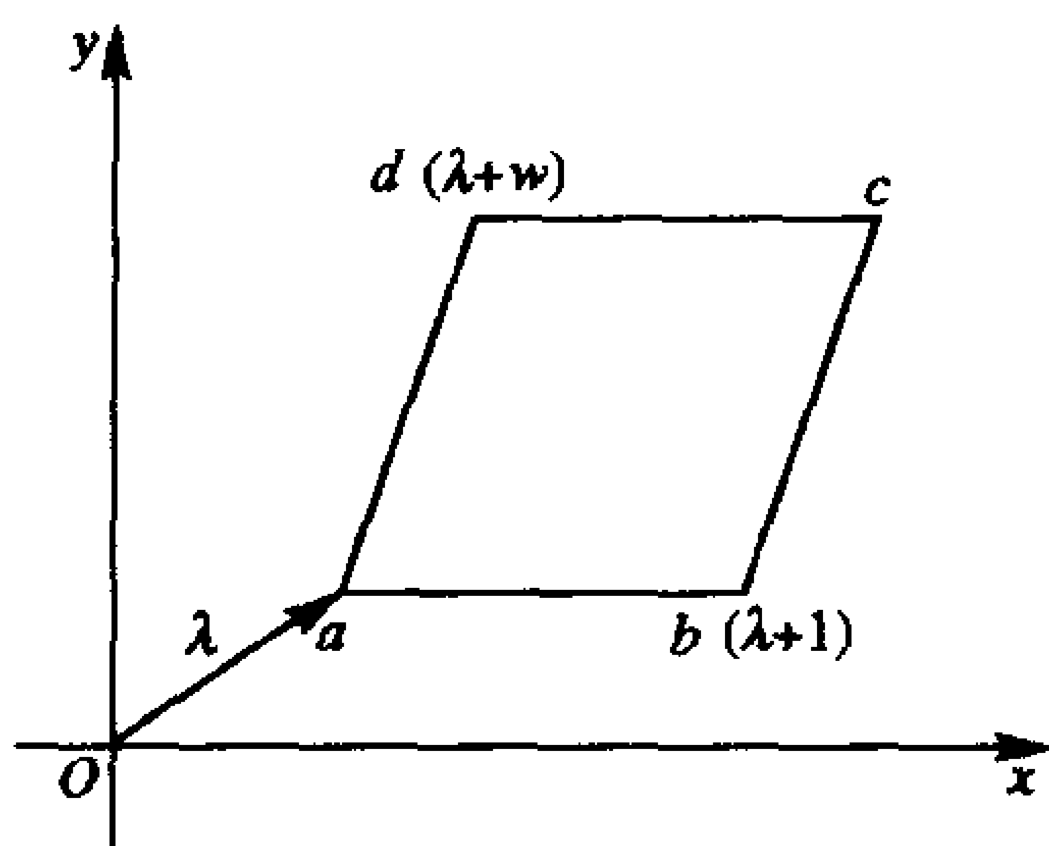


图　4.1

其中 $abcd$ 是 Π_λ 的边界(逆时针方向,见图 4.1).用性质 2.6 的证明方法及表 4.1 的第一行可得

$$N=(2\pi\mathrm{i})^{-1}\left\{\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\frac{\Theta_1(s|w)}{\Theta_1(s+w|w)}\mathrm{d}s+\int_d^a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\frac{\Theta_1(s|w)}{\Theta_1(s+1|w)}\mathrm{d}s\right\},$$

进而推出 $N=1$,这就证明了所要的结论.具体推导留给读者.

一个整函数可按它的零点展成无穷乘积,对 Θ_j 有下面的定理.

定理 4.2　对固定的 $w\in\boldsymbol{H}$,有无穷乘积展开式

$$\begin{aligned}\Theta_1(s|w)&=2\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}w/4}\sin\pi s\prod_{m=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mw})(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mw}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s})(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mw}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}s})\\&=2q^{1/4}\sin\pi s\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1-q^{2m}z)(1-q^{2m}z^{-1});\end{aligned}\tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\Theta_2(s|w)&=2\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}w/4}\cos\pi s\prod_{m=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mw})(1+\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mw}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s})(1+\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mw}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}s})\\&=2q^{1/4}\cos\pi s\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1+q^{2m}z)(1+q^{2m}z^{-1});\end{aligned}\tag{4.7}$$

$$\Theta_3(s|w)=\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2\pi imw})(1+e^{\pi i(2m-1)w}e^{2\pi is})(1+e^{\pi i(2m-1)w}e^{-2\pi is})$$

$$=\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1+q^{2m-1}z)(1+q^{2m-1}z^{-1});\qquad(4.8)$$

$$\Theta_4(s|w)=\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2\pi imw})(1-e^{\pi i(2m-1)w}e^{2\pi is})(1-e^{\pi i(2m-1)w}e^{-2\pi is})$$

$$=\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1-q^{2m-1}z)(1-q^{2m-1}z^{-1}).\qquad(4.9)$$

证 当 $|q|<1$ 时，无穷乘积

$$F(z)=\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m-1}z)(1+q^{2m-1}z^{-1}),\quad z\neq 0\quad(4.10)$$

收敛，它以且仅以 $z=-q^{2k-1}$，$k\in\mathbf{Z}$ 为其零点，均是一级零点. 注意到 $q=e^{\pi iw}$，因而，$F(e^{2\pi is})$ 是 s 的整函数，且和 $\Theta_3(s|w)$ 有完全相同的零点集合(为什么). 所以，$T(s|w)=\Theta_3(s|w)/F(e^{2\pi is})$ 是一个没有零点的整函数. 利用表 4.1 容易验证(留给读者)：

$$T(s+1|w)=T(s|w),\quad T(s+w|w)=T(s|w).$$

这表明整函数 $T(s|w)$ 是一个双周期函数，因此是一个椭圆函数，故由性质 2.3 知它是一个常数，即 $T(s|w)=T(w)$. 下面来计算 $T(w)$.

由式(4.4)及(4.10)容易算出

$$\Theta_3(1/2|w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}=T(w)\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m-1})^2,$$

进而有

$$\begin{aligned}T(w)&\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})^{-1}\\&=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\right)\left\{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1-q^{2m-1})\right\}^{-1}\\&=S(w).\end{aligned}\qquad(4.11)$$

类似可得

$$\Theta_3(1/4|w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^n q^{n^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{4n^2}$$

$$=T(w)\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{4m-2}),$$

$$T(w)\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})^{-1}$$

$$=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{4n^2}\right)\left\{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{4m})(1-q^{8m-4})\right\}^{-1}$$

$$=S(4w),\tag{4.12}$$

这里用到了 $q=e^{\pi iw}$. 由式(4.11)和(4.12)就推出(为什么): $S(w)\equiv 1, w\in \boldsymbol{H}$. 这就证明了式(4.8). 其他三式可类似证明,留给读者.

下面我们利用 Theta 函数来构造椭圆函数. 为此记

$$\Theta_1'(w)=\left.\frac{\mathrm{d}\Theta_1(s|w)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0},$$

$$\Theta_j(w)=\Theta_j(0|w),\quad j=2,3,4.\tag{4.13}$$

显然有

$$\Theta_1'(w)=2\pi q^{1/4}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})^3,\quad w\in \boldsymbol{H}.\tag{4.14}$$

$$\Theta_2(w)=2q^{1/4}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1+q^{2m})^2,\quad w\in \boldsymbol{H}.\tag{4.15}$$

$$\Theta_3(w)=\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1+q^{2m-1})^2,\quad w\in \boldsymbol{H}.\tag{4.16}$$

$$\Theta_4(w)=\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1-q^{2m-1})^2,\quad w\in \boldsymbol{H}.\tag{4.17}$$

进一步构造函数

$$f_j(s|w)=\{\Theta_1'(w)/\Theta_j(w)\}\{\Theta_j(s|w)/\Theta_1(s|w)\},$$

$$s\in \boldsymbol{C},\quad w\in \boldsymbol{H},\quad j=2,3,4.\tag{4.18}$$

定理 4.3 我们有表 4.3 和表 4.4.

表 4.3

$f_2(s+1\|w)=\ \ f_2(s\|w)$	$f_2(s+w\|w)=-f_2(s\|w)$
$f_3(s+1\|w)=-f_3(s\|w)$	$f_3(s+w\|w)=-f_3(s\|w)$
$f_4(s+1\|w)=-f_4(s\|w)$	$f_4(s+w\|w)=\ \ f_4(s\|w)$

表 4.4

	1/2	$w/2$	$(1+w)/2$
$f_2(\cdot\,\vert w)$	0	$-\mathrm{i}\pi\Theta_3^2(w)$	$-\mathrm{i}\pi\Theta_4^2(w)$
$f_3(\cdot\,\vert w)$	$\pi\Theta_4^2(w)$	$-\mathrm{i}\pi\Theta_2^2(w)$	0
$f_4(\cdot\,\vert w)$	$\pi\Theta_3^2(w)$	0	$\pi\Theta_2^2(w)$

表 4.3 和表 4.4 分别由表 4.1 和表 4.2 推出，具体推导留给读者. 现在我们来证明

定理 4.4 对固定的 $w\in\boldsymbol{H}$，作为 s 的半纯函数，

(i) $f_j^2(s|w)$ $(j=2,3,4)$ 都是以 $w,1$ 为基本周期对的二阶椭圆函数，其全部极点就是 $\Lambda(w,1)$的格点，均是二级；

(ii) $f_2(s|w)$是以 $2w,1$ 为基本周期对的二阶椭圆函数，其全部极点就是 $\Lambda(w,1)$的格点，均是一级；

(iii) $f_3(s|w)$是以 $2w,2$ 为基本周期对的四阶椭圆函数，其全部极点就是 $\Lambda(w,1)$的格点，均是一级；

(iv) $f_4(s|w)$是以 $w,2$ 为基本周期对的二阶椭圆函数，其全部极点就是 $\Lambda(w,1)$的格点，均是一级.

证 容易看出，对固定的 $w\in\boldsymbol{H}$，作为 s 的半纯函数，$f_j(s|w)$ $(j=2,3,4)$在 $s=0$ 有一个一级极点. 这样，由表 4.3 立即推出所要的全部结论，具体推导留给读者.

以后在模形式理论中要用到的重要函数是

$$\theta_1(w)=\theta(w)=\Theta_3(0|w)=\Theta_3(w)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}n^2w}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2},\quad w\in\boldsymbol{H},\tag{4.19}$$

$$\theta_2(w)=\theta(2w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n^2w}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{2n^2},\quad w\in\boldsymbol{H},\tag{4.20}$$

$$\theta_k(w)=\theta(kw),\quad k\in\boldsymbol{N},\quad w\in\boldsymbol{H},\tag{4.21}$$

以及下面由式(4.37)定义的 $\theta(w;\chi)$. 现来讨论它们的性质，这是本节的重点. 下面的引理是非常有用的，通常称为 Poisson 求和公式.

引理 4.5 设 $f(x)$是定义在整个实轴上的实函数. 那么，当条件(i) 在任一有限区间上有限变差. 再设存在正数 A，使当 $x\geqslant A$ 及

$x\leqslant -A$ 时，$f(x)$均单调，以及积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在；或条件(ii) 在整个实轴上二次连续可微，以及积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和$\int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|\mathrm{d}x$ 均存在，有一成立时，我们有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{f}(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}{}' g(l),$$

其中 $\bar{f}(x)$表示函数 $f(x)$在点 x 处的左、右极限的平均值，求和条件 $'$ 表示级数取主值，以及

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} yx}\mathrm{d}x, \quad -\infty < y < \infty. \tag{4.22}$$

证　先来证明当条件(i)成立时结论成立. 由单调性及积分存在知，函数项级数

$$S(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+u), \quad -\infty < u < \infty \tag{4.23}$$

收敛，且在 u 的任一有限区间上一致收敛，以及所确定的函数 $S(u)$ 以 1 为周期. 设正整数 $N\geqslant A$，令

$$\begin{aligned} S(u) &= \sum_{n\leqslant -N-1} f(n+u) + \sum_{-N\leqslant n\leqslant N-1} f(n+u) + \sum_{n\geqslant N} f(n+u) \\ &= F_1(u) + F_2(u) + F_3(u), \quad 0\leqslant u\leqslant 1. \end{aligned}$$

显见，$F_1(u)$，$F_3(u)$在$[0,1]$区间上单调，以及 $F_2(u)$在$[0,1]$区间上是有界变差的. 因此，由 Fourier 级数的 Dirichlet-Jordan 收敛判别法推出

$$\frac{1}{2}(S(0_+) + S(0_-)) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}{}' \int_0^1 S(u)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} lu}\mathrm{d}u.$$

另一方面，由确定 $S(u)$的级数在 u 的任一有限区间上的一致收敛性推出

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(S(0_+) + S(0_-)) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-0)\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{f}(n), \end{aligned}$$

以及

$$\int_0^1 S(u)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} lu}\mathrm{d}u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(n+u)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} lu}\mathrm{d}u = g(l).$$

综合以上三式即得所要结论. 为了证明当条件(ii)成立时结论也成立,先来证明：当条件(ii)成立时必有

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \tag{4.24}$$

以及级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(n), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \tag{4.25}$$

均收敛. 由积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$存在知,当$n\to\pm\infty$时,$\int_{n}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x\to 0$. 因而由积分中值定理知,存在$\lambda_n$:

$$n \leqslant \lambda_n \leqslant n+1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

使得

$$\lim_{n\to\pm\infty} f(\lambda_n) = 0. \tag{4.26}$$

进而由微分中值定理知,存在η_n:

$$n \leqslant \lambda_n < \eta_n < \lambda_{n+2} < n+3, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

使得

$$\lim_{n\to\pm\infty} f'(\eta_n) = 0. \tag{4.27}$$

另一方面,从积分$\int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\mathrm{d}x$存在,推出极限$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$和$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$均存在(为什么),由此及上式就推出

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0.$$

对任意的x,必有惟一的n,使得$n\leqslant\lambda_n\leqslant x<\lambda_{n+1}\leqslant n+2$. 因而有

$$|f(x) - f(\lambda_n)| = \left|\int_{\lambda_n}^{x} f'(u)\mathrm{d}u\right| \leqslant 2\max_{\lambda_n\leqslant u\leqslant x} |f'(u)|.$$

这样,由以上两式及式(4.26)就推出

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

这就证明了式(4.24). 下面来证式(4.25)中的级数的收敛性. 我们有

$$\begin{aligned} f'(n) &= \int_{n-1}^{n} f'(x)\mathrm{d}x + \int_{n-1}^{n} \{f'(n) - f'(x)\}\mathrm{d}x \\ &= f(n) - f(n-1) + \int_{n-1}^{n}\mathrm{d}x\int_{x}^{n} f''(y)\mathrm{d}y \\ &= f(n) - f(n-1) + \int_{n-1}^{n} (y-n+1)f''(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

上式两边对 n 求和,利用式(4.24)得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{n-1}^{n}(y-n+1)f''(y)\mathrm{d}y,$$

右边的级数由条件:积分$\int_{-\infty}^{\infty}|f''(x)|\mathrm{d}x$ 存在,推出它绝对收敛.这就证明了式(4.25)中的第一个级数收敛.类似可得

$$\begin{aligned}f(n) &= \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x + \int_{n-1}^{n}(y-n+1)f'(y)\mathrm{d}y\\ &= \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}f'(n) - \frac{1}{2}\int_{n-1}^{n}(y-n+1)^2 f''(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

进而有

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(n)\\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{n-1}^{n}(y-n+1)^2 f''(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由条件(ii)及已经证明的级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f'(n)$收敛,就推出上式左边的级数收敛.

现在可以来证明:当条件(ii)成立时定理结论成立.显见,在条件(ii)下,积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\mathrm{d}x$,$\int_{-\infty}^{\infty}|f''(x+u)|\mathrm{d}x$,当 u 在任一有限区间上变化时,都是一致收敛的.因而,由证明式(4.24)和(4.25)的过程,容易看出:函数项级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(n+u)$及 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f'(n+u)$在 u 的任一有限区间上也都是一致收敛的.因此,同样可设 $S(u)$由式(4.23)给出,它是周期为 1 的连续可微函数.设 $S(u)$的 Fourier 级数是

$$S(u) = {\sum_{l=-\infty}^{\infty}}' a_l \mathrm{e}^{2\pi i l u},$$

其中

$$\begin{aligned}a_l &= \int_0^1 S(u)\mathrm{e}^{-2\pi i l u}\mathrm{d}u = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+u)\mathrm{e}^{-2\pi i l u}\mathrm{d}u\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^1 f(n+u)\mathrm{e}^{-2\pi i l u}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\mathrm{e}^{-2\pi i l u}\mathrm{d}u = g(l),\end{aligned}$$

这里可交换求和号与积分号是因为定义 $S(u)$ 的级数(见式(4.23))在区间[0,1]上是一致收敛的. 取 $u=0$,由式(4.22)及以上两式即得所要结论. 证毕.

定理 4.6 设 a 是实数,

$$\psi(x,a)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi(n+a)^2x},\quad x>0. \tag{4.28}$$

我们有

$$\psi(1/x,a)=x^{1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi n^2x+2\pi \mathrm{i}na},\quad x>0. \tag{4.29}$$

特别当 $a=0$ 时有

$$\psi(1/x)=x^{1/2}\psi(x),\quad x>0, \tag{4.30}$$

其中

$$\psi(x)=\psi(x,0),\quad x>0. \tag{4.31}$$

证 在引理 4.5 中取 $f(u)=\exp(-\pi(u+a)^2/x)$,它满足条件(i). 作变量替换 $u+a=xy$,得到

$$\begin{aligned}g(v)&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi(u+a)^2/x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}vu}\mathrm{d}u\\&=x\mathrm{e}^{-\pi xv^2+2\pi\mathrm{i}va}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi x(y+\mathrm{i}v)^2}\mathrm{d}y\\&=\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\pi xv^2+2\pi\mathrm{i}va},\end{aligned}$$

最后一步用到了熟知的结果(利用复分析中的 Cauchy 积分定理)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi x(y+\mathrm{i}v)^2}\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi xy^2}\mathrm{d}y,$$

及概率积分(见式(36.3))

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}.$$

综合以上所得,由引理 4.5 就推出所要结论. 证毕.

利用解析开拓,由定理 4.6 立即推出(证明留给读者)

定理 4.7 我们有

$$\theta(-1/w)=(w/\mathrm{i})^{1/2}\theta(w),\quad w\in \boldsymbol{H}, \tag{4.32}$$

这里取 $(1)^{1/2}=1$.

相应于 $\psi(x)$ 和 $\theta(w)$,下面讨论它们带特征的情形.

定理 4.8 设 χ 是模 k 的原特征(其定义见附录§35 定义 35.2), $x>0$. 再设

$$\psi(x;\chi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi(n)\exp(-\pi xn^2/k),\quad 当\ \chi(-1)=1; \tag{4.33}$$

$$\psi(x;\chi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\chi(n)\exp(-\pi xn^2/k),\quad 当\ \chi(-1)=-1. \tag{4.34}$$

那么,我们有

$$\psi(1/x;\chi)=\tau(\chi)(x/k)^{1/2}\psi(x;\bar{\chi}),\quad 当\ \chi(-1)=1; \tag{4.35}$$

$$\psi(1/x;\chi)=-\mathrm{i}\tau(\chi)x(x/k)^{1/2}\psi(x;\bar{\chi}),\quad 当\ \chi(-1)=-1, \tag{4.36}$$

其中

$$\tau(\chi)=\sum_{n=1}^{k}\chi(n)e(n/k).$$

证 当 $\chi(-1)=1$ 时,由定理 4.6 可得

$$\begin{aligned}\psi(1/x;\chi)&=\sum_{m=1}^{k}\chi(m)\psi(k/x,m/k)\\&=(x/k)^{1/2}\sum_{m=1}^{k}\chi(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi n^2x/k+2\pi\mathrm{i}nm/k}\\&=(x/k)^{1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}G(n;\chi)\mathrm{e}^{-\pi n^2x/k},\end{aligned}$$

由此及性质 35.16 就推出式(4.35). 下面来证式(4.36). 当 $\chi(-1)=-1$ 时,

$$\begin{aligned}\psi(1/x;\chi)=&k\sum_{m=1}^{k}\chi(m)\sum_{l=-\infty}^{\infty}(l+m/k)\\&\cdot\exp(-\pi(l+m/k)^2(k/x)).\end{aligned}$$

注意到,式(4.29)两边对 a 求导,得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(n+a)\exp(-\pi(n+a)^2/x)$$

$$= - \mathrm{i}x^{3/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\exp(-\pi n^2 x + 2\pi \mathrm{i}na).$$

利用性质 35.16,由以上两式推出

$$\psi(1/x;\chi) = - \mathrm{i}x(x/k)^{1/2}\sum_{l=-\infty}^{\infty} G(l;\chi)l\mathrm{e}^{-\pi xl^2/k}$$

$$= - \mathrm{i}\tau(\chi)x(x/k)^{1/2}\psi(x;\overline{\chi}).$$

这就证明了式(4.36). 证毕.

利用解析开拓,由式(4.35),(4.36)可推得

$$\psi(1/z;\chi) = \tau(\chi)(z/k)^{1/2}\psi(z;\overline{\chi}),$$

$$\mathrm{Re}z > 0, \quad 当\ \chi(-1) = 1; \tag{4.35'}$$

$$\psi(1/z;\chi) = - \mathrm{i}\tau(\chi)z(z/k)^{1/2}\psi(z;\overline{\chi}),$$

$$\mathrm{Re}z > 0, \quad 当\ \chi(-1) = -1. \tag{4.36'}$$

现设 $k>1$. 记

$$\theta(w;\chi) = (1/2)\psi(-\mathrm{i}w;\chi), \quad w \in \boldsymbol{H}. \tag{4.37}$$

由于 $k>1$,显然有

$$\theta(w;\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\exp(\pi \mathrm{i}wn^2/k), \quad 当\ \chi(-1) = 1; \tag{4.38}$$

$$\theta(w;\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}n\chi(n)\exp(\pi \mathrm{i}wn^2/k), \quad 当\ \chi(-1) = -1. \tag{4.39}$$

由性质 35.16(iii)及定理 4.8 立即推出(证明留给读者)

定理 4.9 设 $k>1$. 当 χ 是模 k 的实原特征时,

$$\theta(-1/w;\chi) = (w/\mathrm{i})^{1/2}\theta(w;\chi), \quad 当\ \chi(-1) = 1;$$

$$\theta(-1/w;\chi) = (w/\mathrm{i})^{3/2}\theta(w;\chi), \quad 当\ \chi(-1) = -1.$$

特别的,当 χ 是模 12 的实原特征 χ_1 时,即

$$\chi_1(\pm 1) = 1, \quad \chi_1(\pm 5) = -1, \tag{4.40}$$

记

$$\widetilde{\eta}(w) = \theta(w;\chi_1) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi_1(n)\exp(2\pi \mathrm{i}wn^2/24), \tag{4.41}$$

我们有

$$\widetilde{\eta}^{24}(-1/w) = w^{12}\widetilde{\eta}^{24}(w). \tag{4.42}$$

问　题

1. 设 $\mathrm{Im}\,\omega_1/\omega_2\neq 0$，$f(z)$是整函数. 如果存在常数 a 和 b，使得对所有复数 z 有

$$f(z+\omega_1)=af(z),\quad f(z+\omega_2)=bf(z)$$

成立，那么，必有 $f(z)=Ae^{Bz}$，其中 A,B 是常数.

2. 给定格 $\Lambda=\Lambda(\omega_1,\omega_2)$及正整数 m，求 $\Lambda\backslash \boldsymbol{C}$ 中的 m 阶格点的基，以及这种不同的基的组数.

3. 设 N 是给定的正整数，f 是 $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{C}$ 的以 N 为周期的周期函数，即

$$f(m+N,n)=f(m,n+N)=f(m,n),\quad m,n\in\boldsymbol{Z},$$

以及 $f(0,0)=0$. 再设 $k=2,3,4,\cdots$，格 $\Lambda=\Lambda(\omega_1,\omega_2)$，以及定义函数

$$F_k(\Lambda)=\sum_{m,n\in Z}\frac{f(m,n)}{(m\omega_1+n\omega_2)^k}. \qquad (*)$$

证明：

(i) 当 $k>2$ 时，式(*)右边的和式绝对收敛；

(ii) 当 $k=2$ 时，若满足条件 $\sum^{*}f(m,n)=0$，这里求和条件 * 表示 $0\leqslant m,n<N$，则式(*)右边的和式当对 m,n 依$|m\omega_1+n\omega_2|$非减的顺序求和时收敛；

(iii) 利用 Weierstrass 函数$\wp(z;\Lambda)$及其导数的值来表示 $F_k(\Lambda)$.

4. 设 $f(z)$是 m 阶椭圆函数. 证明：$f'(z)$是 n 阶椭圆函数，$m+1\leqslant n\leqslant 2m$.

5. 设 $f(z)$是椭圆函数，$\Lambda_f=\Lambda(\omega_1,\omega_2)$. 若 $f(z)$是偶函数，则 $\omega_1/2,\omega_2/2,(\omega_1+\omega_2)/2$ 是 $f'(z)$的零点.

6. 设 $\Lambda=\Lambda(\mathrm{i},1)=\boldsymbol{Z}[\mathrm{i}]$，称为 Gauss 整数格. 证明：$g_3(\Lambda)=0$，以及 $g_2(\Lambda)$是非零实数.

7. 设 $\rho=(-1+\sqrt{-3})/2$，格 $\Lambda=\Lambda(\rho,1)=\boldsymbol{Z}[\rho]$. 证明：$g_2(\Lambda)=0$，以及 $g_3(\Lambda)$是非零实数.

8. 设复数 $c\neq 0$. (i) 一定存在格 Λ，使得 $g_2(\Lambda)=c$，$g_3(\Lambda)=0$；

(ii) 一定存在格 Λ,使得 $g_2(\Lambda)=0, g_3(\Lambda)=c$.

9. 设椭圆函数 $f(z), g(z)\in\mathscr{E}(\omega_1,\omega_2)$. 证明：存在非零多项式 $P(u,v)$,使得 $P(f(z),g(z))=0$.

10. 设 ω_1,ω_2 是 Weierstrass 函数 $\wp(z)$ 的基本周期对，e_1,e_2,e_3 由式(3.11)给出. 证明：

$$\wp''(\omega_1/2) = 2(e_1 - e_2)(e_1 - e_3),$$

并求出 $\wp''(\omega_2/2)$ 及 $\wp''((\omega_1+\omega_2)/2)$ 的相应表达式.

11. 证明：$\wp(2z)=\{[\wp^2(z)+g_2/4]^2+2g_3\wp(z)\}/\{4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3\}$,这里 g_2,g_3 由式(3.10)给出.

12. 不用定理 3.3,直接证明：

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3),$$

这里 e_1,e_2,e_3 由式(3.11)给出.

13. 证明：$\wp''(z)=6\wp^2(z)-g_2/2$.

14. 利用 $\wp'(z)$ 或 $\wp''(z)$ 所满足的方程，证明：

$$G_8(\Lambda) = (3/7)G_4^2(\Lambda).$$

15. 设 $x=\csc^2 z-1/3, \Lambda(t)=\Lambda(\mathrm{i}t,\pi)$. 证明：(i) 它满足微分方程 $(x')^2=4x^3-(4/3)x-8/27$;(ii) $\lim\limits_{t\to+\infty}\wp(z;\Lambda(t))=\csc^2 z-1/3$.

16. 若 $z_1+z_2+z_3=0$,则

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(z_1) & \wp'(z_1) \\ 1 & \wp(z_2) & \wp'(z_2) \\ 1 & \wp(z_3) & \wp'(z_3) \end{vmatrix} = 0.$$

17. 设 $\Lambda=\Lambda(\mathrm{i},1)$. 直接证明：$F_3(z;\Lambda)$ 在其周期平行四边形上的三个零点是 $1/2, \mathrm{i}/2, (1+\mathrm{i})/2$.

18. 求以下椭圆曲线上点的和：(i) 求椭圆曲线 $y^2=x^3+1$(见图 3.2)上点的和：$P_1\oplus P_2, P_4\oplus P_4, P_2\oplus P_3$;(ii) 求椭圆曲线 $y^2=x^3-7$(见图 3.3)上点的和：$P_1\oplus P_1, P_2\oplus P_3, P_2\oplus P_2\oplus P_3$;(iii) 求椭圆曲线 $y^2=x^3-5^2x$(见图 3.4)上点的和：$P_1\oplus P_2, P_2\oplus P_2, P_1\oplus P_3$.

19. 一个正整数 n 称为**同余数**(congruent number),如果它等于某个边长为有理数的直角三角形的面积.

(i) n 是同余数的充要条件是存在有理数 x 使得 $x, x+n, x-n$

均为有理数的平方. 相应的边长为有理数的直角三角形的三边 $X<Y<Z$ 是：

$$X=(x+n)^{1/2}-(x-n)^{1/2},$$

$$Y=(x+n)^{1/2}+(x-n)^{1/2},\quad Z=2x^{1/2}.$$

(ii) 当 n 是无平方因子数时，上述的边长为有理数的直角三角形，有理数 x，及同余数 n 之间的对应是一一的；

(iii) 证明：$n=1,2,3$ 及 4 都不是同余数.

20. (i) 设 n 是无平方因子数. 那么，n 是同余数的充要条件是椭圆曲线 $y^2=x^3-n^2x$ 有有理解 x,y，满足条件：$x=(s/t)^2,(s,t)=1,(s,n)=1$，及 t 是偶数. 此外，这里的 x 与上题中的相同.

(ii) 试求 $y^2=x^3-5^2x$, $y^2=x^3-6^2x$, $y^2=x^3-7^2x$，及 $y^2=x^3-31^2x$ 上的有理点，并说明是否符合(i)中的条件.

21. 设 $\Lambda=\Lambda(w,1)$, $\mathrm{Im}w>0$. 利用 $\wp(z;\Lambda)$ 来表示 $f_j^2(s|w)$ $(j=2,3,4)$, $f_3(s|w)$ 及 $f_4(s|w)$.

22. (Poisson 公式的推广)设 r 个实变量函数 $f(x_1,\cdots,x_r)$ 满足条件：级数

$$\sum_{n_1,\cdots,n_r=-\infty}^{\infty} f(n_1+x_1,\cdots,n_r+x_r)$$

在 $(x_1,\cdots,x_r)$ 的任一有界闭集上绝对一致收敛到一个可微函数 $F(x_1,\cdots,x_r)$. 那么有

$$\begin{aligned} F(x_1,\cdots,x_r) &= \sum_{n_1,\cdots,n_r=-\infty}^{\infty} f(n_1+x_1,\cdots,n_r+x_r) \\ &= \sum_{m_1,\cdots,m_r=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(m_1x_1+\cdots+m_rx_r)} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(m_1t_1+\cdots+m_rt_r)} f(t_1,\cdots,t_r)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_r. \end{aligned}$$

这里的条件是很强的，试指出并讨论使结论成立的较弱条件.

23. 设 $A=(a_{ij})$ 是 r 阶正定对称矩阵，且 $a_{ii}(1\leqslant i\leqslant r)$ 及 $2a_{ij}$ $(1\leqslant i\neq j\leqslant r)$ 均是整数. 记 $\bar{t}=(t_1,\cdots,t_r)$ 是一行向量，$\bar{t}'$ 表 $\bar{t}$ 的转置，以及 $A[\bar{t}]=\bar{t}A\bar{t}'$. 令

$$\theta_A(z;\bar{x})=\sum_{\bar{n}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}A[\bar{n}+\bar{x}]},\quad z\in \boldsymbol{H},$$

这里求和号表示对所有整向量 $\bar{n}$ 求和，$\bar{x}=(x_1,\cdots,x_r)$是任一实向量.证明：

(i) 对任意的实向量 $\bar{m}$有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{2\pi i z A\left[\bar{t}-\frac{1}{2z}A^{-1}\bar{m}'\right]\right\}\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_r$$
$$=((-2iz)^r|A|)^{-1/2},$$

这里 $z\in \boldsymbol{H}$，以及取$\sqrt{1}=1$这一支；

(ii) (Jacobi 反转公式)

$$\theta_A(z;\bar{x})=((-2iz)^r|A|)^{-1/2}\cdot\sum_{\bar{m}}\exp\left\{\frac{\pi i}{2z}A^{-1}[\bar{m}]+2\pi i\bar{x}\bar{m}'\right\},\quad z\in \boldsymbol{H}.$$

特别地有

$$\theta_A(z)=((-2iz)^r|A|)^{-1/2}\theta_{A^{-1}}\left(-\frac{1}{4z}\right),\quad z\in \boldsymbol{H}.$$

第二章　完全模群的 Eisenstein 级数 $G_{2k}(\tau)$

本章是讨论最简单的 Eisenstein 级数. 在 §5 先引进格函数，复向量函数，及相应的上半复平面上的函数等概念，进而引进模函数概念. 通过具体讨论相应的 Eisenstein 级数 $G_{2k}(\Lambda)$，$G_{2k}(\omega_1,\omega_2)$，及 $G_{2k}(\tau)(k\geqslant 2)$，一方面使我们对模函数有一个初步的感性认识，另一方面也指出了椭圆函数和模函数之间的关系. 在 §6 将讨论函数 $G_2(\tau)$及与它密切相关的 Dedekind η 函数，这在模形式理论中是十分重要的.

§5　格函数、模函数、Eisenstein 级数

在 §3 我们看到椭圆函数与以格 Λ 为变量的函数——Eisenstein 级数 $G_{2k}(\Lambda)$有密切相系，而格可由它的一组基 ω_1,ω_2——这可看做为复向量(ω_1,ω_2)——来确定，这样，我们可以引进

定义 5.1　以格 Λ 为变量取复值(可取值∞)的函数 $F(\Lambda)$称为**格函数**. 以(满足条件(2.2)的)复向量(ω_1,ω_2)为变量取复值(可取值∞)的函数 $H(\omega_1,\omega_2)$称为**复向量函数**，简称**向量函数**. 若复向量函数 $H(\omega_1,\omega_2)$满足条件

$$H(\omega_1',\omega_2') = H(\omega_1,\omega_2), \tag{5.1}$$

只要

$$\begin{bmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix},\quad \alpha\in\Gamma, \tag{5.2}$$

则称为是**完全模群 Γ 上的复向量函数**.

对给定的格函数 $F(\Lambda)$，就可惟一确定一个复向量函数

$$F(\omega_1,\omega_2) = F(\Lambda),\quad \Lambda = \Lambda(\omega_1,\omega_2), \tag{5.3}$$

且 $F(\omega_1,\omega_2)$一定是完全模群 Γ 上的复向量函数. 反过来，对给定的

一般复向量函数就不一定能确定一个格函数. 但容易验证(留给读者): 对给定的完全模群 Γ 上的复向量函数 $H(\omega_1,\omega_2)$, 可惟一确定一个格函数

$$H(\Lambda) = H(\omega_1,\omega_2), \quad \Lambda(\omega_1,\omega_2) = \Lambda. \tag{5.4}$$

以后, 我们不加说明地说到向量函数时总是指完全模群 Γ 上的复向量函数.

当 $k\geqslant 2$ 时,

$$G_{2k}(\omega_1,\omega_2) = \sum_{0\neq\omega\in\Lambda}\frac{1}{\omega^{2k}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^{2k}} \tag{5.5}$$

就是格函数 $G_{2k}(\Lambda)$(见式(3.4))所对应的完全模群 Γ 上的复向量函数, 其中求和条件 ′ 表示 m 和 n 不同时为零.

定义 5.2 设 k 是整数. 若格函数 $F(\Lambda)$ 对任意的复数 $\lambda\neq 0$, 有

$$F(\lambda\Lambda) = \lambda^{-k}F(\Lambda) \tag{5.6}$$

成立, 则称 $F(\Lambda)$ 是 **k 阶格函数**, 这里 $\lambda\Lambda=\{\lambda\omega: \omega\in\Lambda\}$ 也是一个格; 若完全模群 Γ 上的复向量函数 $H(\omega_1,\omega_2)$ 对任意的复数 $\lambda\neq 0$, 有

$$H(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2) = \lambda^{-k}H(\omega_1,\omega_2) \tag{5.7}$$

成立, 则称 $H(\omega_1,\omega_2)$ 是**完全模群 Γ 上的 k 阶向量函数**, 简称 **k 阶向量函数**.

显见, 当 $k\geqslant 2$ 时, $G_{2k}(\Lambda)$ 及 $G_{2k}(\omega_1,\omega_2)$ 分别是 $2k$ 阶格函数及 $2k$ 阶向量函数; 常数是零阶格函数及零阶向量函数. 容易证明(留给读者):

定理 5.1 $F(\Lambda)$ 是 k 阶格函数的充要条件是对应的完全模群 Γ 上的复向量函数 $F(\omega_1,\omega_2)$(见式(5.3)和(5.4))满足: 对任意的复数 $\lambda\neq 0$, 有

$$F(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2) = \lambda^{-k}F(\omega_1,\omega_2). \tag{5.8}$$

此外, k_1 阶和 k_2 阶格函数(向量函数)的积是 k_1+k_2 阶格函数(向量函数); k 阶格函数(向量函数)的倒数是 $-k$ 阶格函数(向量函数).

在式(5.8)中取 $\lambda=\omega_2^{-1}$, 并记 $\tau=\omega_1/\omega_2$, 得

$$F(\tau) = F(\tau,1) = \omega_2^kF(\omega_1,\omega_2). \tag{5.9}$$

这就相应确定了一个定义在上半复平面

$$\boldsymbol{H} = \{\tau\in\boldsymbol{C}: \mathrm{Im}\tau > 0\} \tag{5.10}$$

上的函数 $F(\tau)$. 相应于 $G_{2k}(\Lambda)$和 $G_{2k}(\omega_1,\omega_2)(k\geqslant 2)$的是

$$G_{2k}(\tau)=G_{2k}(\tau,1)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(m\tau+n)^{2k}},\quad \tau\in\boldsymbol{H},\quad k\geqslant 2. \tag{5.11}$$

它称为**完全模群 Γ 上的 2k 阶 Eisenstein 级数**,简称 **2k 阶 Eisenstein 级数**或 **Eisenstein 级数**,其中求和条件 ′ 表示 m 和 n 不同时为零.

设

$$\alpha=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}. \tag{5.12}$$

当 $\alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{R})$时,由它确定完全复平面 $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$上的线性分式变换

$$\tau'=\alpha(\tau)=(a\tau+b)/(c\tau+d). \tag{5.13}$$

由式(1.15)知,这变换把完全上半平面 $\boldsymbol{H}\cup\{\infty\}\cup\{\boldsymbol{R}\}$一一映射到自身. 特别的,当 $\alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{Q})$时,这变换把扩大的上半平面

$$\boldsymbol{H}^*=\boldsymbol{H}\cup\{\infty\}\cup\{\boldsymbol{Q}\} \tag{5.14}$$

一一映射到自身,且把$\{\infty\}\cup\{\boldsymbol{Q}\}$(无穷远点和有理点)变到自身.

定理 5.2　设 $F(\Lambda)$是格函数,$F(\omega_1,\omega_2)$是相应的向量函数,以及 $F(\tau)$由式(5.9)给出. 那么,$F(\Lambda)$是 k 阶格函数,即 $F(\omega_1,\omega_2)$是 k 阶向量函数的充要条件是有

$$F(\alpha(\tau))=(j(\tau;\alpha))^kF(\tau),\quad \alpha\in\Gamma \tag{5.15}$$

成立,其中

$$j(\tau;\alpha)=(c\tau+d). \tag{5.16}$$

α 由式(5.12)给出. 特别的有

$$F(\tau+1)=F(\tau),\quad F(-1/\tau)=\tau^kF(\tau). \tag{5.17}$$

证　我们来证必要性. 设 ω_1,ω_2 是 Λ 的一组基,记 $\tau=\omega_1/\omega_2$,$\alpha\in\Gamma$ 由式(5.12)给出,及

$$\begin{bmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}.$$

由此及式(5.9),(5.7)和定义 5.1 推出:

$$F(\alpha(\tau))=F(\alpha(\tau),1)=F(\omega_1'/\omega_2',1)$$

$$=(\omega_2')^k F(\omega_1',\omega_2') = (\omega_2')^k F(\omega_1,\omega_2)$$
$$=(\omega_2'/\omega_2)^k F(\omega_1/\omega_2,1) = (c\tau+d)^k F(\tau).$$

这就证明了式(5.15). 充分性及式(5.17)的证明留给读者.

定义 5.3 设 $F(\tau)$ 是定义在上半平面 $\boldsymbol{H}$ 上的半纯函数. (i) 若满足式(5.15),则称为是**完全模群 Γ 的权为 k 的模函数**,全体这样的函数组成的集合记作 $V_k(\Gamma)$;(ii) 若对模群 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 满足

$$F(\alpha(\tau)) = (j(\tau;\alpha))^k F(\tau), \quad \alpha\in\Gamma', \tag{5.18}$$

则 $F(\tau)$ 称为是**模群 Γ' 的权为 k 的模函数**,全体这样的函数组成的集合记作 $V_k(\Gamma')$.

粗略地说,格函数 $F(\Lambda)$,向量函数 $F(\omega_1,\omega_2)$ 及模函数 $F(\tau)$ 是从不同的角度、以不同的方式描述同一个对象. 我们最为熟悉的是作为复变量 $\tau\in\boldsymbol{H}$ 的函数 $F(\tau)$. 以后就是从这一角度去讨论.

为了便于刻画关系式(5.15),(5.18),我们引进一个更一般的算子.

定义 5.4 设 k 是给定的整数,$\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R})$ 由式(5.12)给出. 我们定义 $\boldsymbol{H}$ 上的半纯函数空间到自身的算子'$[\alpha]_k$'(或'$\circ[\alpha]_k$'): $F\mapsto F\circ[\alpha]_k$ 为

$$F\circ[\alpha]_k(\tau) = |\alpha|^{k/2}(j(\tau;\alpha))^{-k}F(\alpha(\tau)), \tag{5.19}$$

这里的 $\alpha(\tau)$ 和 $j(\tau;\alpha)$ 分别由式(5.13)和(5.16)给出. 算子'$[\alpha]_k$'(或'$\circ[\alpha]_k$')称为是**权为 k 的 α 变换**,特别当 $\alpha\in\Gamma$ 时,称为是**权为 k 的模变换**.

简单说来,设 U 是 $\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{R})$ 的一个所谓离散子群(类似于模群,这里不作解释). 自守函数理论就是研究这样一类函数 F 的性质:当 $\alpha\in U$ 时,有式(5.18)成立,即有

$$F\circ[\alpha]_k = F \tag{5.20}$$

成立. 本书就是要讨论 **U 是同余子群 Γ'(见定义 11.1)——一类特殊的模群——时,这样一类函数的基本知识**,也就是**模函数的基本知识**. 因此,必要的预备知识是模群 Γ' 的性质及上半平面 $\boldsymbol{H}$ 在变换(5.13)($\alpha\in\Gamma'$)下的性质. 我们将在 §7~10 讨论 Γ' 为完全模群 Γ 时的这些预备知识,而在 §11~14 将讨论 Γ' 为一般同余子群的情形.

由定理 3.6,式(3.13)及以上讨论知:

(i) 当 $k\geqslant 2$ 时,完全模群 Γ 上的 Eisenstein 级数 $G_{2k}(\Lambda)$, $G_{2k}(\omega_1,\omega_2)$ 及 $G_{2k}(\tau)$ 分别是 $2k$ 阶格函数,完全模群 Γ 上的 $2k$ 阶向量函数及完全模群 Γ 的权为 $2k$ 的模函数. 我们有

$$G_{2k}\circ[\alpha]_{2k}=G_{2k},\quad G_{2k}(\tau)=(j(\tau;\alpha))^{-2k}G_{2k}(\alpha(\tau)),\quad \alpha\in\Gamma. \tag{5.21}$$

(ii) 相应的

$$\begin{aligned}\Delta(\Lambda)&=g_2^3(\Lambda)-27g_3^2(\Lambda)\\&=(60G_4(\Lambda))^3-27(140G_6(\Lambda))^2,\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\omega_1,\omega_2)&=g_2^3(\omega_1,\omega_2)-27g_3^2(\omega_1,\omega_2)\\&=(60G_4(\omega_1,\omega_2))^3-27(140G_6(\omega_1,\omega_2))^2,\end{aligned} \tag{5.22$'$}$$

及

$$\begin{aligned}\Delta(\tau)&=g_2^3(\tau)-27g_3^2(\tau)\\&=(60G_4(\tau))^3-27(140G_6(\tau))^2,\quad \tau\in\boldsymbol{H},\end{aligned} \tag{5.22$''$}$$

分别是 12 阶格函数,完全模群 Γ 上的 12 阶向量函数及完全模群 Γ 的权为 12 的模函数,它们恒不为零,通常 $\Delta(\tau)$ 称为是**判别式函数**. 我们有

$$\Delta\circ[\alpha]_{12}=\Delta,\quad \Delta(\tau)=(j(\tau;\alpha))^{-12}\Delta(\alpha(\tau)),\quad \alpha\in\Gamma. \tag{5.23}$$

(iii) 相应的

$$J(\Lambda)=g_2^3(\Lambda)/\Delta(\Lambda), \tag{5.24}$$

$$J(\omega_1,\omega_2)=g_2^3(\omega_1,\omega_2)/\Delta(\omega_1,\omega_2), \tag{5.24$'$}$$

及

$$J(\tau)=g_2^3(\tau)/\Delta(\tau),\quad \tau\in\boldsymbol{H}, \tag{5.24$''$}$$

分别是 0 阶格函数,完全模群 Γ 上的 0 阶向量函数及完全模群 Γ 的权为 0 的模函数,通常 $J(\tau)$ 称为是 **Klein 模函数**. 我们有

$$J\circ[\alpha]_0=J,\quad J(\tau)=J(\alpha(\tau)),\quad \alpha\in\Gamma. \tag{5.25}$$

容易证明(留给读者): $G_{2k}(\tau)$, $\Delta(\tau)$ 及 $J(\tau)$ 都是 $\boldsymbol{H}$ 内的解析函数. 这些函数是模形式理论中最重要最基本的实例. 本节主要目的就是讨论它们(主要是 $G_{2k}(\tau)$)的基本性质,以对模形式理论有一个感

性认识.

$G_{2k}(\tau)$以及$\Delta(\tau)$,$J(\tau)$都是$\boldsymbol{H}$内的解析函数(且均是周期为1),所以讨论当$\mathrm{Im}\tau\to+\infty$,即$\tau\to+\mathrm{i}\infty$时的性质是十分重要的.设$q$为正整数.一个$\boldsymbol{H}$内周期为$q$的解析函数$f(\tau)$,只要在半长条

$$\tau\in\boldsymbol{H},\quad 0\leqslant\mathrm{Re}\,\tau<q \tag{5.26}$$

上来讨论.作变换

$$z=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau/q},\quad 即\ \tau=(q/(2\pi\mathrm{i}))\log z,\quad \log 1=0, \tag{5.27}$$

它把半长条(5.26)一一对应地变到区域

$$0<|z|<1. \tag{5.28}$$

显见,它把$\boldsymbol{H}$亦变到(无穷多次重复)区域(5.28).这样,

$$g(z)=f((q/(2\pi\mathrm{i}))\log z) \tag{5.29}$$

就是区域(5.28)内的解析函数.当$\mathrm{Im}\tau\to+\infty$时,$z\to0$,所以$f(\tau)$当$\mathrm{Im}\tau\to+\infty$,即$\tau\to+\mathrm{i}\infty$时的性质就是$g(z)$在其孤立奇点$z=0$处的性质,而后者可以通过它在$z=0$处的 Laurent 展式来讨论:

$$g(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n,\quad 0<|z|<1. \tag{5.30}$$

通过变换(5.27),由展式(5.30)可相应得到$f(\tau)$的一个展式:

$$f(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n\tau/q},\quad \tau\in\boldsymbol{H}, \tag{5.31}$$

它称为$f(\tau)$**在无穷远点$+\mathrm{i}\infty$的 Fourier 展式**,简称$f(\tau)$的 **Fourier 展式**.无穷远点$+\mathrm{i}\infty$有时也简记为∞.

下面我们直接来求$G_{2k}(\tau)$的 Fourier 展式,并进而求出$\Delta(\tau)$及$J(\tau)$的 Fourier 展式.为此,先证明两个引理

引理 5.3 我们有

$$\cot w=\frac{1}{w}+\sum_{0\neq m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{w-m\pi}+\frac{1}{m\pi}\right),\quad w\in\boldsymbol{C}, \tag{5.32}$$

其中右边的级数在任一不包含极点$m\pi(m\in\boldsymbol{Z})$的有限闭区域上绝对一致收敛.

证 先证后一结论.对任意的$R>1$,当$|w|\leqslant R\pi$时,

$$\sum_{|m|\geqslant 2R}\left|\frac{1}{w-m\pi}+\frac{1}{m\pi}\right|=\sum_{|m|\geqslant 2R}\frac{|w|}{|m\pi(m\pi-w)|}\leqslant\frac{2R}{\pi}\sum_{|m|\geqslant 2R}\frac{1}{m^2},$$

由此就推出所要结论.现在来证式(5.32).考虑函数$f(w)=\cot w-$

$1/w$. 先来证明：$f(w)$在以$\pm(n+1/2)\pi$, $\pm\mathrm{i}(n+1/2)\pi$为顶点的所有正方形的边界 $L_n(n=0,1,2,\cdots)$上有界. $1/w$ 当然在 L_n 上有界，只需要讨论 $\cot w$. 由于 π 是 $\cot w$ 的周期，所以只要证明在以$\pm\pi/2$ $\pm\mathrm{i}(n+1/2)\pi$ 为顶点的矩形边界 L_n' 上有界. 当 $n=0$ 显然成立. 设 $w=u+\mathrm{i}v$. 当 $v\geqslant\pi/2$ 时，

$$|\cot w| = |(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w})/(1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w})| \leqslant (1+\mathrm{e}^{-\pi})/(1-\mathrm{e}^{-\pi});$$

当 $v\leqslant-\pi/2$ 时，

$$|\cot w| = |(1+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}w})/(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}w})| \leqslant (1+\mathrm{e}^{-\pi})/(1-\mathrm{e}^{-\pi}).$$

由此就推出所要结论(为什么). 设 $z\neq0$ 不是 $f(w)$的极点，且在 L_n 内部. 考虑积分

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_n}\frac{f(w)}{w(w-z)}\mathrm{d}w.$$

被积函数在 L_n 内的极点是：$0,z,k\pi(k=\pm1,\cdots,\pm n)$，都是一级，及留数分别为$-f(0)/z, f(z)/z, 1/k\pi(k\pi-z)(k=\pm1,\cdots,\pm n)$. 由留数定理得

$$\begin{aligned} I_n(z) &= \frac{f(z)}{z} + \sum_{\substack{k=-n\\k\neq0}}^{n}\frac{1}{k\pi(k\pi-z)} \\ &= \frac{\cot z}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}\sum_{\substack{k=-n\\k\neq0}}^{n}\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right), \end{aligned}$$

这里用到了 $f(0)=0$. 由于 $f(w)$在 L_n 上有界(与 n 无关)，所当 $n\to+\infty$时，$I_n(z)\to0$. 由此及上式就推出式(5.32).

引理 5.4　设 $l\geqslant2$. 当 $\tau\in\boldsymbol{H}$ 时，有

$$(-1)^{l-1}(l-1)!\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\tau+m)^l} = -(2\pi\mathrm{i})^l\sum_{r=1}^{\infty}r^{l-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}r\tau}. \tag{5.33}$$

证　当 $\tau\in\boldsymbol{H}$ 时，有

$$\begin{aligned} \pi\cot\pi\tau &= \pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}+1}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}-1} = -\pi\mathrm{i}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}+1)\sum_{r=0}^{\infty}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}r\tau} \\ &= -\pi\mathrm{i}\left(1+2\sum_{r=1}^{\infty}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}r\tau}\right). \end{aligned}$$

由此及式(5.32)($w=\pi\tau$)得

$$\frac{1}{\tau}+\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau-m}+\frac{1}{m}\right)=-\pi i\left(1+2\sum_{r=1}^{\infty}e^{2\pi i r\tau}\right).$$

对上式两边逐项求导(为什么可以),即得式(5.33).

定理 5.5 设 $k\geqslant 2$. 当 $\tau\in \boldsymbol{H}$ 时,有

$$G_{2k}(\tau)=2\zeta(2k)+2a(2k)\sum_{l=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(l)e^{2\pi i l\tau},\tag{5.34}$$

其中

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s},\quad \mathrm{Re}\,s>1,\tag{5.35}$$

$$a(k)=(-1)^k(2\pi i)^k/(k-1)!,\tag{5.36}$$

以及

$$\sigma_t(n)=\sum_{d|n}d^t.\tag{5.37}$$

证 由式(5.11)及(5.33)得

$$\begin{aligned}G_{2k}(\tau)&=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}+\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m\tau+n)^{2k}}\\&=2\zeta(2k)+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m\tau+n)^{2k}}\\&=2\zeta(2k)+2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}r^{2k-1}e^{2\pi i r m\tau}.\end{aligned}$$

最后的二重级数是绝对收敛的,令 $l=rm$,由上式即得式(5.34)(为什么).

式(5.34)就是 $G_{2k}(\tau)$ 在 $+i\infty$ 的 Fourier 展式. 在对应(5.29)下,设 $G_{2k}(\tau)$ 对应于 $M_{2k}(z)$,这样就有

$$M_{2k}(z)=2\zeta(2k)+2a(2k)\sum_{l=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(l)z^l,\quad 0<|z|<1.$$

所以,$z=0$ 是 $M_{2k}(z)$ 的可去奇点,是解析的. 因此,就说 $G_{2k}(\tau)$ 在无穷远点 $+i\infty$ 解析,其值为

$$G_{2k}(+i\infty)=\lim_{\tau\to+i\infty}G_{2k}(\tau)=\lim_{\mathrm{Im}\tau\to+\infty}G_{2k}(\tau)=2\zeta(2k).\tag{5.38}$$

下面来给出 $\zeta(2k)$ 和 Bernoulli 数之间的关系,由此可得计算 $\zeta(2k)$ 的一个算法.

引理 5.6 设

$$z(e^z-1)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n,\quad |z|<2\pi,\tag{5.39}$$

其中 B_n 称为 **Bernoulli 数**. 我们有

$$B_0=1,\quad B_1=-1/2,\quad B_n=\sum_{d=0}^{n}\binom{n}{d}B_d,\quad n\geqslant 2,\tag{5.40}$$

$$B_n=0,\quad 2\nmid n\geqslant 3,\tag{5.41}$$

以及

$$\zeta(2k)=(-1/4k)a(2k)B_{2k},\tag{5.42}$$

其中 $a(k)$由式(5.36)给出.

证　由式(5.39)得

$$z=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}z^m\right),$$

比较两边系数即得式(5.40). 进而由 $B_1=-1/2$ 及式(5.39)推出

$$\frac{z}{2}\,\frac{e^z+1}{e^z-1}=\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n,\quad |z|<2\pi.$$

显见,这是一个偶函数,所以式(5.41)成立. 令 $z=2\pi i\tau$,由上式及式(5.41)推出

$$\pi\tau\cot\pi\tau=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a(2k)}{2k}B_{2k}\tau^{2k},\quad |\tau|<1.$$

另一方面,由式(5.32)(取 $w=\pi\tau$)得

$$\begin{aligned}\pi\tau\cot\pi\tau&=1+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau^2}{\tau^2-m^2}=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau^2}{m^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{\tau}{m}\right)^{2l}\\&=1-2\sum_{l=0}^{\infty}\zeta(2l+2)\tau^{2l+2},\quad |\tau|<1.\end{aligned}$$

比较以上两式,即得式(5.42). 证毕.

这样,计算 $\zeta(2k)$就归结为计算 Bernoulli 数 B_{2k},而后者可用递推公式(5.40)来计算. 下面是开头几个 B_{2k}的值:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
B_{2k}	1/6	$-1/30$	1/42	$-1/30$	5/66	$-691/2730$	7/6	$-3617/510$

(5.43)

由式(5.34)和(5.42)可得: 当 $k\geqslant 2$ 时,

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k)\left\{1 - \frac{4k}{B_{2k}}\sum_{l=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(l)e^{2\pi i l\tau}\right\}, \quad \tau \in \boldsymbol{H}. \tag{5.44}$$

令

$$E_{2k}(\tau) = \frac{1}{2\zeta(2k)}G_{2k}(\tau), \quad \tau \in \boldsymbol{H}. \tag{5.45}$$

显然有

$$E_{2k}(+i\infty) = 1. \tag{5.46}$$

$E_{2k}(\tau)$称为是**完全模群上的 $2k$ 阶标准 Eisenstein 级数**.

利用式(5.11)并按 m,n 的最大公约数分类来求和,可得

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{d=1}^{\infty}\sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n)=d}}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m\tau+n)^{2k}}$$

$$= \left(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^{2k}}\right)\sum_{\substack{m'=-\infty \\ (m',n')=1}}^{\infty}\sum_{n'=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m'\tau+n')^{2k}}, \quad \tau \in \boldsymbol{H}.$$

由此及式(5.45)得

$$E_{2k}(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n)=1}}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m\tau+n)^{2k}}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=-\infty \\ (m,n)=1}}^{\infty}\frac{1}{(m\tau+n)^{2k}}, \quad \tau \in \boldsymbol{H}. \tag{5.47}$$

利用式(5.43)不难算出(留给读者)

$$g_2(\tau) = 60G_4(\tau) = \frac{4\pi^4}{3}\left\{1 + 240\sum_{l=1}^{\infty}\sigma_3(l)e^{2\pi i l\tau}\right\}$$

$$= \frac{4\pi^4}{3}E_4(\tau), \quad \tau \in \boldsymbol{H}, \tag{5.48}$$

$$g_3(\tau) = 140G_6(\tau) = \frac{8\pi^6}{27}\left\{1 - 504\sum_{l=1}^{\infty}\sigma_5(l)e^{2\pi i l\tau}\right\}$$

$$= \frac{8\pi^6}{27}E_6(\tau), \quad \tau \in \boldsymbol{H}. \tag{5.49}$$

关于 $\Delta(\tau)$和 $J(\tau)$有下面的结论.

定理 5.7 我们有

$$\Delta(\tau) = g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau) = (2\pi)^{12}\sum_{l=1}^{\infty}\tau(l)e^{2\pi i l\tau}, \quad \tau \in \boldsymbol{H}, \tag{5.50}$$

$$J(\tau)=g_2^3(\tau)/\Delta(\tau)=(12)^{-3}\left\{e^{-2\pi i\tau}+\sum_{l=0}^{\infty}c(l)e^{2\pi il\tau}\right\},\quad \tau\in \boldsymbol{H},\tag{5.51}$$

其中系数 $\tau(l)$，$c(l)$ 都是整数，$\tau(1)=1$，$\tau(2)=-24$，$c(0)=744$，$+i\infty$ 是 $\Delta(\tau)$ 的一级零点及 $J(\tau)$ 的一级极点. $\tau(l)$ 通常称为 **Ramanujun** 函数.

证　先来证式(5.50). 设

$$A=\sum_{l=1}^{\infty}\sigma_3(l)e^{2\pi il\tau},\quad B=\sum_{l=1}^{\infty}\sigma_5(l)e^{2\pi il\tau}.$$

由式(5.48)和(5.49)得

$$\begin{aligned}\Delta(\tau)&=\frac{64\pi^{12}}{27}\{(1+240A)^3-(1-504B)^2\}\\&=\frac{64\pi^{12}}{27}\{12^2(5A+7B)+12^3(100A^2-147B^2+8000A^3)\}.\end{aligned}$$

因此，为证 $\tau(l)$ 都是整数就是要证：对所有 $l\geqslant1$，有

$$5\sigma_3(l)+7\sigma_5(l)=\sum_{d\mid l}(5d^3+7d^5)\equiv0(\mathrm{mod}\ 12).\tag{5.52}$$

容易验证，对任意整数 d，有

$$5d^3+7d^5\equiv d^3(d^2-1)\equiv0(\mathrm{mod}\ 3),$$
$$5d^3+7d^5\equiv d^3(1-d^2)\equiv0(\mathrm{mod}\ 4),$$

所以式(5.52)成立. $\tau(1)=1$，$\tau(2)=-24$ 可直接验证. 下面来证式(5.51). 设 $z=e^{2\pi i\tau}$，以及下面的 $I_j(1\leqslant j\leqslant5)$ 均表系数为整数的 z 的幂级数. 利用式(5.48)，(5.49)，$\tau(1)=1$ 及 $\tau(2)=-24$，可得

$$\begin{aligned}g_2^3(\tau)&=\frac{64\pi^{12}}{27}(1+240z+z^2I_1)^3\\&=\frac{64\pi^{12}}{27}(1+720z+z^2I_2),\\ \Delta(\tau)&=\frac{64\pi^{12}}{27}\{12^3z(1-24z+z^2I_3)\}.\end{aligned}$$

进而有

$$\begin{aligned}J(\tau)&=(1+720z+z^2I_2)\{12^3z(1-24z+z^2I_3)\}^{-1}\\&=(12^3z)^{-1}(1+720z+z^2I_2)(1+24z+z^2I_4)\\&=(12^3z)^{-1}(1+744z+z^2I_5).\end{aligned}$$

这就证明了式(5.51).证毕.

$c(n)$,$\tau(n)$是两个十分重要的数论函数(见[TA,p22]).它们开头几个值是

$$c(0) = 744,$$
$$c(1) = 196884,$$
$$c(2) = 21493760,$$
$$c(3) = 864299970,$$
$$c(4) = 20245856256,$$
$$c(5) = 333202640600,$$
$$c(6) = 4252023300096,$$
$$c(7) = 44656994071935,$$
$$c(8) = 401490886656000;$$

及

$$\tau(1)=1, \qquad \tau(6)=-6048,$$
$$\tau(2)=-24, \qquad \tau(7)=-16744,$$
$$\tau(3)=252, \qquad \tau(8)=84480,$$
$$\tau(4)=-1472, \qquad \tau(9)=-113643,$$
$$\tau(5)=4830, \qquad \tau(10)=-115920.$$

$c(n)$有一些有趣的算术性质,例如,

$$(n+1)c(n) \equiv 0 \pmod{24}, \quad n \geqslant 1,$$
$$c(5n) \equiv 0 \pmod{25}, \quad n \geqslant 1,$$
$$c(7n) \equiv 0 \pmod{7}, \quad n \geqslant 1,$$
$$c(11n) \equiv 0 \pmod{11}, \quad n \geqslant 1.$$

H. Petersson 证明了渐近公式:

$$c(n) \sim 2^{-1/2} n^{-3/4} e^{4\pi n^{1/2}}, \quad n \to \infty.$$

在§25 我们将证明 $\tau(n)$是积性的(见式(25.47)),即

$$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n), \quad (m,n) = 1,$$

以及对素数 p 有

$$\tau(p^{n+1}) = \tau(p^n)\tau(p) - p^{11}\tau(p^{n-1}), \quad n \geqslant 1.$$

$\tau(n)$也有一些有趣的数论性质(见[数百 3,Ramanujan 函数]):对素数 p 有

$$\tau(p)\equiv 1+p^{11}(\bmod 691),$$
$$\tau(p)\equiv 1+p^{10}(\bmod 25),$$

以及

$$\tau(n)\equiv\sigma_{11}(n)(\bmod 2^{11}),\quad 若\ n\equiv 1(\bmod 8).$$

关于 $\tau(n)$ 的著名的 Ramanujan 猜想(见[数百 3, Ramanujan 猜想]):

$$|\tau(p)|\leqslant 2p^{11/2},\quad p\ 为素数,$$

1974 年被 P. Deligne 所证明.

§6　$G_2(\tau)$和 Dedekind η 函数

我们在讨论 Eisenstein 级数 $G_{2k}(\tau)$时,有限制 $k>1$,因为由引理 2.8 知:当 $k=1$ 时,作为定义 $G_{2k}(\tau)$的二重级数(见式(5.11))是不绝对收敛. 但另一方面,在求 Eisenstein 级数 $G_{2k}(\tau)(k>1)$的 Fourier 展式时,这二重级数是化为累次级数来求和的——先对 n 后对 m(见定理 5.5 的证明). 容易看出:这累次级数当 $k=1$ 时也是收敛的. 因此,当 $k=1$ 时就用这累次级数来定义 $G_2(\tau)$,即

$$G_2(\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(m\tau+n)^2}\right\},\quad \tau\in\boldsymbol{H},\tag{6.1}$$

上式右边是一个累次级数,其中对 n 的求和条件 ′ 表示:当 $m=0$ 时 n 不等于零. 我们称 $G_2(\tau)$为**二阶 Eisenstein 级数**.

定理 6.1　我们有

(i)

$$G_2(\tau)=2\zeta(2)\left\{1-24\sum_{l=1}^{\infty}\sigma_1(l)e^{2\pi il\tau}\right\},\quad \tau\in\boldsymbol{H};\tag{6.2}$$

(ii) 交换求和号后的累次级数收敛,且有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(m\tau+n)^2}\right\}=\tau^{-2}G_2(-1/\tau),\quad \tau\in\boldsymbol{H},\tag{6.3}$$

其中对 m 的求和条件 ′ 表示:当 $n=0$ 时 m 不等于零,以及有

$$\tau^{-2}G_2(-1/\tau)=G_2(\tau)-2\pi i/\tau,\quad \tau\in\boldsymbol{H}.\tag{6.4}$$

证　定理 5.5 的证明过程对 $k=1$ 也成立,由此及 $\zeta(2)=\pi^2/6$

就推出式(6.2).式(6.3)是显然的(为什么).下面证式(6.4).为此设

$$a_{m,n}(\tau)=\frac{1}{m\tau+n-1}-\frac{1}{m\tau+n}. \tag{6.5}$$

显见,对 $m\neq0,\tau\in\boldsymbol{H}$ 有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{m,n}(\tau)=0.$$

因而有

$$\begin{aligned}G_2(\tau)&=2\zeta(2)+\sum_{m\neq0}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m\tau+n)^2}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{m,n}(\tau)\right\}\\&=2\zeta(2)+\sum_{m\neq0}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{-1}{(m\tau+n)^2(m\tau+n-1)}\right\}.\end{aligned}$$

上式中的累次级数(事实上作为二重级数)当 $\tau\in\boldsymbol{H}$ 时是绝对收敛的(为什么),所以可交换求和号,得到

$$G_2(\tau)=2\zeta(2)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{m\neq0}\left(\frac{1}{(m\tau+n)^2}-a_{m,n}(\tau)\right)\right\}.$$

由此及式(6.3)推出累次级数

$$A(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{m\neq0}a_{m,n}(\tau)\right\},\quad\tau\in\boldsymbol{H}$$

收敛,且有

$$G_2(\tau)=\tau^{-2}G_2\left(\frac{-1}{\tau}\right)-A(\tau),\quad\tau\in\boldsymbol{H}.$$

下面来计算 $A(\tau)$.设 N 是正整数,我们有

$$\begin{aligned}A(\tau)&=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N+1}^{N}\left\{\sum_{m\neq0}\left(\frac{1}{m\tau+n-1}-\frac{1}{m\tau+n}\right)\right\}\\&=\lim_{N\to+\infty}\sum_{m\neq0}\left\{\sum_{n=-N+1}^{N}\left(\frac{1}{(m\tau+n-1)}-\frac{1}{(m\tau+n)}\right)\right\}\\&=\lim_{N\to+\infty}\sum_{m\neq0}\left\{\frac{1}{m\tau-N}-\frac{1}{m\tau+N}\right\}\\&=\frac{1}{\tau}\lim_{N\to+\infty}\sum_{m\neq0}\left\{\left(\frac{1}{-N/\tau+m}+\frac{1}{-m}\right)\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{1}{-N/\tau-m}+\frac{1}{m}\right)\right\}\\&=\frac{2}{\tau}\lim_{N\to+\infty}\left\{\pi\cot\left(\frac{-\pi N}{\tau}\right)+\frac{\tau}{N}\right\}=-\frac{2\pi i}{\tau},\end{aligned}$$

最后两步用到了引理 5.3，以及求极限．由以上两式就证明了式(6.4)．证毕．

有时，我们把式(6.2)作为 $G_2(\tau)$ 的定义，并推出有式(6.1)成立．具体的讨论留给读者．

同样的，把 $G_2(\tau)$ 标准化，我们记

$$E_2(\tau) = G_2(\tau)/(2\zeta(2)), \quad \tau \in \boldsymbol{H}, \tag{6.6}$$

它满足

$$\tau^{-2}E_2(-1/\tau) = E_2(\tau) + 12/(2\pi i\tau), \quad \tau \in \boldsymbol{H}. \tag{6.7}$$

和 $E_2(\tau)$ 密切相关的一个重要函数是

$$\eta(\tau) = e^{2\pi i\tau/24}\prod_{r=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i r\tau}), \quad \tau \in \boldsymbol{H}. \tag{6.8}$$

它称为 **Dedekind η 函数**．显见，当 $\tau \in \boldsymbol{H}$ 时，无穷乘积绝对收敛，且对任意的 $\delta > 0$，当 $\mathrm{Im}\tau \geqslant \delta$ 时是一致收敛的，以及有

$$\eta(+i\infty) = \lim_{\mathrm{Im}\tau \to +\infty}\eta(\tau) = 0. \tag{6.9}$$

我们来证明

定理 6.2　我们有

$$\eta'(\tau)/\eta(\tau) = (2\pi i/24)E_2(\tau), \quad \tau \in \boldsymbol{H}, \tag{6.10}$$

及

$$\eta(-1/\tau) = (\tau/i)^{1/2}\eta(\tau), \quad \tau \in \boldsymbol{H}, \tag{6.11}$$

其中取 $(1)^{1/2} = 1$．此外，有

$$\eta^{24}(\tau + 1) = \eta^{24}(\tau), \quad \eta^{24}(-1/\tau) = \tau^{12}\eta^{24}(\tau), \quad \tau \in \boldsymbol{H}. \tag{6.12}$$

证　由式(6.6)及式(6.2)(即定理 5.5 证明过程的 $k=1$ 的情形)可得

$$\begin{aligned} E_2(\tau) &= 1 - 24\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i r m\tau} = 1 - 24\sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i r\tau}(1 - e^{2\pi i r\tau})^{-1} \\ &= 1 + \frac{24}{2\pi i}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{d}{d\tau}\log(1 - e^{2\pi i r\tau}) = \frac{24}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\log\eta(\tau), \quad \tau \in \boldsymbol{H}. \end{aligned}$$

这就证明了式(6.10)(为什么)．由式(6.10)和(6.7)推出

$$\frac{d}{d\tau}\log\eta\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\log\eta(\tau) + \frac{1}{2\tau}, \quad \tau \in \boldsymbol{H}.$$

进而有

$$\eta\left(\frac{-1}{\tau}\right)=C_0\sqrt{\tau}\,\eta(\tau),\quad \tau\in\boldsymbol{H},$$

其中 C_0 为一常数. 令 $\tau=\mathrm{i}$ 得 $C_0\sqrt{\mathrm{i}}=1$,由此及上式就证明了式(6.11). 式(6.12)的证明留给读者. 证毕.

在§17 将证明(见式(17.6),(17.6′)):

$$\eta(\tau)=\tilde{\eta}(\tau),$$

这里 $\tilde{\eta}(\tau)$ 由式(4.41)给出.

问　题

1. (i) 证明: $\pi^{-2k}\zeta(2k)$ 都是有理数;

(ii) 求 $\zeta(2k)$, $k=1,2,3,4,5,6$.

2. 设整数 $k\geqslant 2$. 证明: (i) $G_{2k}(\mathrm{i}/2)=(-4)^kG_{2k}(2\mathrm{i})$; (ii) 当 k 是奇数时, $G_{2k}(\mathrm{i})=0$; (iii) 当 k 不是 3 的倍数时, $G_{2k}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3})=0$.

3. 设整数 $k\geqslant 2$. 证明:

$$\lim_{t\to+\infty}G_{2k}(\mathrm{i}t,\pi)=2\pi^{-2k}\zeta(2k)=2\pi^{-2k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}.$$

4. 求 $G_2(\mathrm{i})$.

5. (i) 利用 Γ 函数的积分表示式(见§36 性质 36.4)证明:

$$w^{-z}\Gamma(z)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-uw}u^{z-1}\mathrm{d}u,\quad \mathrm{Re}\,w>0,\ \mathrm{Re}\,z>0.$$

(ii) 证明: $\displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{(n\tau+m)^2}=-8\pi^2\int_0^{\infty}\cos(2\pi mu)g_\tau(u)\mathrm{d}u$,其中

$$g_\tau(u)=u\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n\tau u},\quad u>0,$$

$$g_\tau(0)=\lim_{u\to 0+}g_\tau(u)=\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}\tau}.$$

(iii) 证明:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{(n\tau+m)^2}=-8\pi^2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}f(t)\cos(2\pi mt)\mathrm{d}t,$$

其中

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}g_\tau(t+k).$$

(iv) 证明：$f(0+)=\frac{-1}{2\pi i\tau}+\sum_{k=1}^{\infty}g_\tau(k)$，及

$$f(1-)=\sum_{k=1}^{\infty}g_\tau(k)=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)e^{2\pi in\tau}.$$

(v) 利用以上结论证明式(6.4).

6. 设 m,n 是正整数. 证明：

$$\sigma_{2k-1}(m)\sigma_{2k-1}(n)=\sum_{d\mid(m,n)}d^{2k-1}\sigma_{2k-1}\left(\frac{mn}{d^2}\right),\quad k\geqslant 1.$$

7. 证明以下恒等式：

(i) $\eta(z+1/2)=e^{2\pi i/48}\eta^3(2z)\eta^{-1}(z)\eta^{-1}(4z)$；

(ii) $E_2(z+1/2)-E_2(z)=48\sum_{2\nmid n>0}\sigma_1(n)e^{2\pi inz}$；

(iii) 设 p 是素数，k 是正整数，

$$E_{2k}(z)-(1+p^{2k-1})E_{2k}(pz)+p^{2k-1}E_{2k}(p^2z)$$
$$=-\frac{4k}{B_{2k}}\sum_{p\nmid n>0}\sigma_{2k-1}(n)e^{2\pi inz}；$$

(iv) $E_2(z)-3E_2(2z)+2E_2(4z)=\frac{1}{2}(E_2(z)-E_2(z+1/2))$；

(v) $\theta_2(z)+\theta_2(z+1/2)=2\theta_2(4z)$.

第三章　完 全 模 群

本章是讨论模变换及完全模群的基本性质. §7 是讨论完全模群的生成元；§8 是讨论模变换及其不动点的分类，引进了模群、模变换群、模(变换)群的不动点、及其基本区域的概念，并详细讨论了完全模群的不动点；在 §9 讨论了完全模群的基本区域和与此相应的拓扑概念；以及在 §10 引入并初步讨论了在辛变换(模变换是其特例)下不变的测度——辛测度.

§7　完全模群的生成元

本节要给出完全模群 $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$的两组常用的生成元.

定理 7.1　完全模群 $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$由矩阵

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\tag{7.1}$$

生成，每个

$$\sigma=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\in\Gamma\tag{7.2}$$

可表为

$$\sigma=T^{n(1)}ST^{n(2)}S\cdots T^{n(k-1)}ST^{n(k)},\quad n(1),\cdots,n(k)\in\mathbf{Z}.\tag{7.3}$$

证　由于$-I=S^2=T^0ST^0S$，所以可假定 $c\geqslant0$，以及 $c=0$ 时，$d>0$. 对 c 用归纳法. 当 $c=0$ 时，

$$\sigma=\begin{bmatrix}1 & b\\0 & 1\end{bmatrix}=T^b,$$

所以式(7.3)成立. 假设当 $0\leqslant c<k$ 时式(7.3)都成立. 那么当 $c=k$ 时，设 $d=qk+r$，$-k<r\leqslant0$，我们有

$$\sigma T^{-q}S^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\k & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -q\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b+qa & a\\-r & k\end{bmatrix}.$$

由此及归纳假设知 $\sigma T^{-q}S^{-1}$ 可表为式(7.3)的形式,所以 σ 亦可表为式(7.3)的形式,即当 $c=k$ 时结论成立. 证毕.

注意到

$$(ST)^3 = S^2 = -I, \tag{7.4}$$

所以表示式(7.3)不是惟一的,但我们有以下结论.

定理 7.2　完全模群 $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ 由矩阵

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = -ST = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

生成,每个 $\sigma\in\Gamma$ 可惟一地表为

$$\sigma = S^l V^{n(1)} S V^{n(2)} S \cdots V^{n(k-1)} S V^{n(k)} S^{m(k)}, \tag{7.6}$$

这里

$$l = 0,1,2,3;\ k \geqslant 0,\ n(j) = 1,2,\ 1 \leqslant j \leqslant k,\ \text{以及}\ m(k) = 0,1. \tag{7.7}$$

证　由于 $T=SV$, $V^3=I$ 及 $S^2=-I$,从定理 7.1 立即推出必有表示式(7.6)成立. 因此,只要证惟一性,即证明: 若

$$I = S^l V^{n(1)} S \cdots V^{n(k-1)} S V^{n(k)} S^{m(k)}, \tag{7.8}$$

且满足条件(7.7),则必有 $l=0, k=0$. 当 $k=0$ 时,显然有 $l=0$. 现对 k 用反证法. 若 $k>0$,则由上式得

$$S^r = (V^{n(1)}S)(V^{n(2)}S)\cdots(V^{n(k)}S), \quad r = 0,1,2\ \text{或}\ 3. \tag{7.9}$$

由计算得

$$VS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V^2S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{7.10}$$

式(7.9)就是这样的矩阵相乘(因为 $n(j)=1$ 或 2). 把式(7.10)中的两个矩阵表为

$$\begin{bmatrix} u & -v \\ -x & y \end{bmatrix}$$

的形式时,一定满足条件:

$$u,v,x,y \geqslant 0, \quad v + x > 0;$$

或

$$u,v,x,y \leqslant 0, \quad v + x < 0.$$

不难验证(留给读者),满足以上条件的矩阵相乘仍满足以上条件. 但

由计算知，对任意的 r，S^r 均不满足以上条件，所以式(7.9)不能成立，即 $k>0$ 不能成立. 因此，$k=0$.

§8 模变换及其不动点

为便于讨论，我们先引进若干一般概念.

定义 8.1 由完全辛群(即 $\boldsymbol{R}$ 上的特殊线性群)$\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{R})$中的元素 α 可导出以下两类变换，均称为**辛变换**，且当 $\alpha\in\Gamma=\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z})$时称为**模变换**：设

$$\alpha=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \tag{8.1}$$

(i) 二维复向量空间$\{(\omega_1,\omega_2): \omega_1,\omega_2\in\boldsymbol{C}\}$上的线性变换：

$$\begin{bmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}. \tag{8.2}$$

(ii) 完全复平面 $\boldsymbol{C}^*$ 上的线性分式变换：

$$\tau'=\alpha(\tau)=(a\tau+b)/(c\tau+d). \tag{8.3}$$

全体辛变换(或全体模变换)(情形(i)或(ii))构成一个群，称为**完全辛变换群**(或**完全模变换群**). 设辛群 $U\subseteq\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{R})$(或模群 $\Gamma'\subseteq\Gamma$). 由所有的 $\alpha\in U$(或 Γ')所给出的变换(8.2)组成一个群，称为**辛变换群**(或**模变换群**)，它和 U(或 Γ')同构，故仍记作 U(或 Γ')；由所有的 $\alpha\in U$(或 Γ')所给出的变换(8.3)也组成一个群，亦称为**辛变换群**(或**模变换群**)，记作 $\overline{U}$(或 $\overline{\Gamma}'$).

变换(8.2)和变换(8.3)的一个主要差别是：由 α 和

$$-\alpha=\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

所对应的两个变换(8.3)是相同的，而所对应的两个变换(8.2)是不同的. 显见，

$$\overline{U}'\cong U',\ 当\ -I\notin U';\qquad \overline{U}'\cong U'/\{\pm I\},\ 当\ -I\in U', \tag{8.4}$$

$$\overline{\Gamma}'\cong\Gamma',\ 当\ -I\notin\Gamma';\qquad \overline{\Gamma}'\cong\Gamma'/\{\pm I\},\ 当\ -I\in\Gamma'. \tag{8.4$'$}$$

由式(1.15)知,在变换(8.2)下,

$$\mathrm{Im}\omega_1'/\omega_2' > 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\omega_1/\omega_2 > 0; \tag{8.5}$$

在变换(8.3)下,

$$\mathrm{Im}\tau' > 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\tau > 0. \tag{8.6}$$

当 $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\boldsymbol{R})$ 时,$\boldsymbol{H} \cup \{\infty\} \cup \{\boldsymbol{R}\}$ 及 $\{\infty\} \cup \{\boldsymbol{R}\}$ 都分别一一对应地变到自身;当 $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Q})$ 时,特别当 $\alpha \in \Gamma$ 时,变换(8.3)把 $\boldsymbol{C}^*$,$\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H} \cup \{\infty\} \cup \{\boldsymbol{Q}\}$ 及 $\{\infty\} \cup \{\boldsymbol{Q}\}$ 都分别一一对应地变到自身(这里的讨论对 $\mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R})$ 和 $\mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{Q})$ 同样适用(见式(5.12)~(5.13)).

定义 8.2 设 $\pm I \neq \alpha \in \mathrm{SL}_2(\boldsymbol{R})$,$\alpha$ 由式(8.1)给出. (i) 非零复向量 (ω_1, ω_2) 称为是(相应于 α 的)变换(8.2)的**特征向量**,如果存在复数 λ 使得

$$\alpha \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}, \tag{8.7}$$

λ 称为是(相应于 α 的)变换(8.2)的**特征值**,(ω_1, ω_2) 称为是属于特征值 λ 的**特征向量**;(ii) 点 $\tau \in \boldsymbol{H} \cup \{\infty\} \cup \{\boldsymbol{R}\}$ 称为是(相应于 α 的)变换(8.3)的**不动点**,如果满足

$$\tau = \alpha(\tau) = (a\tau + b)/(c\tau + d), \tag{8.8}$$

式(8.7)就是

$$(\alpha - \lambda I) \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8.7$'$}$$

由于 (ω_1, ω_2) 是非零复向量及 $|\alpha| = 1$,所以,特征值 λ 一定是矩阵 α 的特征多项式

$$|\alpha - \lambda I| = \lambda^2 - (a + d)\lambda + 1 \tag{8.9}$$

的根——特征根. 由式(8.7′)立即看出,属于特征值 λ 的特征向量:当 $c \neq 0$ 时,是

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} \lambda - d \\ c \end{bmatrix}, \quad v \neq 0; \tag{8.10$_1$}$$

当 $c = 0$ 时,必有 $\lambda = a$ 或 $d (= 1/a)$. 当 $b \neq 0$ 时,特征向量是

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda = a, \quad v \neq 0; \tag{8.10$_2$}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}=v\begin{bmatrix}b\\ \lambda-a\end{bmatrix},\quad \lambda=d,\quad v\neq 0;\tag{8.10$_3$}$$

当 $b=0$ 时，必有 $d=1/a\neq\pm 1$，特征向量是

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}=v\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \lambda=a,\quad v\neq 0;\tag{8.10$_4$}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}=v\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad \lambda=d,\quad v\neq 0;\tag{8.10$_5$}$$

当 $\pm I\neq\alpha\in\Gamma, c=0$ 时，必有 $\lambda=a=d=\pm 1$，及 $b\neq 0$，且式(8.10$_2$)和(8.10$_3$)相同.

显见，非零复向量(ω_1,ω_2)是特征向量的充要条件是 $\tau=\omega_1/\omega_2$ 是不动点，这里 $\omega_2=0$ 相应于 $\tau=\infty$. 所以，当 $c\neq 0$ 时，不动点是

$$\tau=(\lambda-d)/c;\tag{8.11$_1$}$$

当 $c=0$ 时，相应于式(8.10$_2$)，(8.10$_3$)，(8.10$_4$)和(8.10$_5$)，不动点分别是

$$\tau=\infty,\ b/(\lambda-a),\ \infty\ 和\ 0.\tag{8.11$_2$}$$

此外，当 $c\neq 0$，式(8.8)就是

$$c\tau^2-(a-d)\tau-b=0.\tag{8.8$'$}$$

它的判别式就是矩阵 α 的特征多项式的判别式

$$\Delta=\Delta(\alpha)=(a+d)^2-4.\tag{8.12}$$

定义 8.3 设 $\pm I\neq\alpha\in SL_2(\boldsymbol{R})$，$\alpha$ 由式(8.1)给出. 记 $\mathrm{tr}\alpha=a+d$，称为**矩阵 α 的迹**.

(i) 判别式 $\Delta(\alpha)$等于零、小于零、或大于零时，即

$$|\mathrm{tr}\alpha|=\pm 2,\quad |\mathrm{tr}\alpha|<2,\quad 或\quad |\mathrm{tr}\alpha|>2\tag{8.13}$$

时，矩阵 α 及其相应的变换(8.2)和(8.3)分别均称为**抛物元**、**椭圆元**或**双曲元**. 我们把相应于抛物元、椭圆元或双曲元的不动点分别均称为**抛物点**(或**尖点**)、**椭圆点**或**双曲点**.

(ii) 当 $\pm I\neq\alpha\in\Gamma$ 时，当且仅当 $\mathrm{tr}\alpha=0,\pm 1$ 时是椭圆元. 我们把相应于 $\mathrm{tr}\alpha=0$(即 $\Delta(\alpha)=-4$)的椭圆元和椭圆点分别称为**二阶椭圆元**和**二阶椭圆点**；把相应于 $\mathrm{tr}\alpha=\pm 1$(即 $\Delta(\alpha)=-3$)的椭圆元和椭圆点分别称为**三阶椭圆元**和**三阶椭圆点**.

定义 8.4 设 Γ'(或 $\overline{U}$)是模变换群(或辛变换群).

(i) 点 $\tau_1,\tau_2\in \boldsymbol{H}^*$ 称为是 $\bar{\Gamma}'$(或 $\bar{U}$)**等价的**,如果存在 $\alpha\in\bar{\Gamma}'$(或 $\bar{U}$)使得 $\tau_1=\alpha(\tau_2)$,这是一个等价关系,与点 τ 等价的所有点组成的等价类称为**点 τ 的 $\bar{\Gamma}'$(或 $\bar{U}$)等价类**,记作 $\bar{\Gamma}'\tau$(或 $\bar{U}\tau$),全体 $\bar{\Gamma}'$(或 $\bar{U}$)的等价类所组成的集合记作 $\bar{\Gamma}'\backslash\boldsymbol{H}^*$(或 $\bar{U}\backslash\boldsymbol{H}^*$);

(ii) 在每个等价类中取一点作为代表所组成的集合称为是 $\boldsymbol{H}^*$ **关于模变换群 $\bar{\Gamma}'$(或辛变换群 $\bar{U}$)的代表集合**,记作$\{\bar{\Gamma}'\backslash\boldsymbol{H}^*\}$(或$\{\bar{U}\backslash\boldsymbol{H}^*\}$).如果所取的代表集合是由一个连通区域添加其部分边界组成,它就称为 **$\boldsymbol{H}^*$ 关于模变换群 $\bar{\Gamma}'$(或辛变换群 $\bar{U}$)的基本区域**;

(iii) 点 $\tau\in\boldsymbol{H}^*$ 称为是**模变换群 $\bar{\Gamma}'$(或辛变换群 $\bar{U}$)的不动点**,如果存在 $\alpha\in\bar{\Gamma}'$(或 $\bar{U}$)使得 $\tau=\alpha(\tau)$. 所有这样的 α 组成 $\bar{\Gamma}'$(或 $\bar{U}$)的一个子群,记作 $\bar{\Gamma}'_\tau$(或 $\bar{U}_\tau$),称为是 **$\bar{\Gamma}'$(或 $\bar{U}$)的不动点 τ 的稳定(或迷向)子群**;

(iv) 模变换群 $\bar{\Gamma}'$ 在 $\boldsymbol{H}^*$ 上的所有抛物点(或尖点),二阶椭圆点,和三阶椭圆点所组成的集合及其元素个数都分别记作:$\mathscr{E}_\infty(\bar{\Gamma}')$(或 $\mathscr{E}_\infty(\Gamma')$),$\mathscr{E}_i(\bar{\Gamma}')$(或 $\mathscr{E}_i(\Gamma')$),和 $\mathscr{E}_\rho(\bar{\Gamma}')$(或 $\mathscr{E}_\rho(\Gamma')$).

注记 在定义 8.4 中,(i) $\boldsymbol{H}^*$ 换为 $\boldsymbol{C}^*$,同样可引进这些概念和符号;(ii) 符号 $\bar{\Gamma}'\tau,\bar{U}\tau,\bar{\Gamma}'\backslash\boldsymbol{H}^*,\bar{U}\backslash\boldsymbol{H}^*,\{\bar{\Gamma}'\backslash\boldsymbol{H}^*\}$,及$\{\bar{U}\backslash\boldsymbol{H}^*\}$亦记作 $\Gamma'\tau,U\tau,\Gamma'\backslash\boldsymbol{H}^*,U\backslash\boldsymbol{H}^*,\{\Gamma'\backslash\boldsymbol{H}^*\}$,及$\{U\backslash\boldsymbol{H}^*\}$;(iii) 设 $\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R})$,$\mathscr{D}^*$ 是 $\bar{U}\backslash\boldsymbol{H}^*$ 的代表集合(或基本区域),以及 $V=\alpha U\alpha^{-1}$. 那么,$\bar{V}\backslash\boldsymbol{H}^*$的代表集合(或基本区域)是 $\alpha\mathscr{D}^*$(证明留给读者). (iv) $\bar{\Gamma}'$(或 $\bar{U}$)的不动点 τ 也称为是**模群 Γ'(或辛群 U)的不动点** τ. 我们记:

$$\Gamma'_\tau=\{\alpha\in\Gamma':\tau=\alpha(\tau)\},\quad U_\tau=\{\alpha\in U:\tau=\alpha(\tau)\},\tag{8.14}$$

它们也称为是 Γ',及 U **的不动点 τ 的稳定(或迷向)子群**. 显然有

$$\bar{\Gamma}'_\tau\cong\Gamma'_\tau,\ 当\ -I\notin\Gamma';\quad \bar{\Gamma}'_\tau\cong\Gamma'_\tau/\{\pm I\},\ 当\ -I\in\Gamma',\tag{8.15}$$

$$\bar{U}_\tau\cong U_\tau,\ 当\ -I\notin U;\quad \bar{U}_\tau\cong U_\tau/\{\pm I\},\ 当\ -I\in U.\tag{8.15$'$}$$

以后我们仅讨论模变换(8.3)及其有关概念,且把模变换(8.3)看作是扩大的上半复平面 $\boldsymbol{H}^*=\boldsymbol{H}\cup\{\infty\}\cup\{\boldsymbol{Q}\}$到自身的变换. 由于

当$|a+d|>2$时，双曲点是两个共轭的实无理数（为什么），它们不属于$\boldsymbol{H}^*$，所以我们不讨论双曲元. 从此以后，没有特别说明，我们所说的都是指扩大的上半复平面$\boldsymbol{H}^*=\boldsymbol{H}\cup\{\infty\}\cup\{\boldsymbol{Q}\}$上的模变换(8.3)及其有关概念. 特别的，不动点也是指属于$\boldsymbol{H}^*$上的不动点.

下面的基本性质是常用的.

定理 8.1 (i) 设α是抛物元（二阶椭圆元，三阶椭圆元或双曲元），$\sigma\in\Gamma$，那么，$\sigma\alpha\sigma^{-1}$也是抛物元（二阶椭圆元三阶椭圆元，或双曲元）；

(ii) 设τ是抛物点（二阶椭圆点，三阶椭圆点，或双曲点），$\sigma\in\Gamma$，那么，$\sigma(\tau)$也是抛物点（二阶椭圆点，三阶椭圆点，或双曲点），且

$$\Gamma_{\sigma(\tau)}=\sigma\Gamma_\tau\sigma^{-1},\quad \overline{\Gamma}_{\sigma(\tau)}=\sigma\overline{\Gamma}_\tau\sigma^{-1};\tag{8.16}$$

(iii) 设$\Gamma'\subseteq\Gamma''\subseteq\Gamma$，那么，$\Gamma'$的不动点$\tau$一定是$\Gamma''$的不动点，以及

$$\overline{\Gamma}'_\tau=\overline{\Gamma}'\cap\overline{\Gamma}''_\tau=\overline{\Gamma}'\cap\overline{\Gamma}_\tau.\tag{8.17}$$

反过来，若τ是$\overline{\Gamma}''$的不动点，那么，τ是$\overline{\Gamma}'$的不动点的充要条件是$\overline{\Gamma}'\cap\overline{\Gamma}''_\tau$不是平凡子群.

证 由

$$\begin{aligned}|\sigma\alpha\sigma^{-1}-\lambda I|&=|\sigma||\alpha-\lambda I||\sigma^{-1}|=|\alpha-\lambda I|\\&=\lambda^2-(a+d)\lambda+1,\end{aligned}$$

就推出(i). $\tau=\alpha(\tau)$成立的充要条件是$\sigma\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\tau))=\sigma(\tau)$，由此及(i)就推出(ii). (iii)是显然的，具体证明留给读者. 证毕.

设$\pm I\neq\alpha\in\Gamma$由式(8.1)给出. 下面来给出α是抛物元，二阶椭圆元，三阶椭圆元时的具体形式及其不动点.

(A) α是抛物元.

$a+d=\pm2$，$-bc=(\pm1-d)^2$. 它的特征值$\lambda=\pm1$. (i) 当$c\neq0$时，

$$\alpha=\begin{bmatrix}\pm2-d & -(\pm1-d)^2/c\\ c & d\end{bmatrix},$$

$$(\pm1-d)^2\equiv0(\mathrm{mod}\ |c|),\tag{8.18}$$

相应的抛物点是

$$\tau=(\lambda-d)/c=(\pm1-d)/c\in\boldsymbol{H}^*,$$

$$(\pm 1 - d)^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\ |c|). \tag{8.19}$$

(ii) 当 $c=0$ 时,

$$\alpha = \begin{bmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \quad b \neq 0, \tag{8.20}$$

即 $\alpha=\pm T^n, n\neq 0$. 相应的抛物点是

$$\tau = \infty \in \boldsymbol{H}^*. \tag{8.21}$$

这就给出了所有的抛物元和抛物点.

(B) α 是二阶椭圆元.

$a+d=0, -bc=d^2+1$. 它的特征值 $\lambda=\pm \mathrm{i}$.

$$\alpha = \begin{bmatrix} -d & -(d^2-1)/c \\ c & d \end{bmatrix}, \quad d^2 \equiv -1(\mathrm{mod}\ |c|). \tag{8.22}$$

相应的二阶椭圆点是

$$\tau = (\lambda - d)/c = (\pm \mathrm{i} - d)/c, \quad d^2 \equiv -1(\mathrm{mod}\ |c|), \tag{8.23}$$

其中有且仅有一个属于 $\boldsymbol{H}^*$. 这就给出了所有的二阶椭圆元和二阶椭圆点.

(C) α 是三阶椭圆元.

$a+d=\pm 1, -bc=d^2\mp d+1$. 它的特征值是

$$\lambda^{\pm}(1) = 1/2 \pm \sqrt{-3}/2 = \mathrm{e}^{\pm \pi \mathrm{i}/3}, \quad a+d=1; \tag{8.24}$$

$$\lambda^{\pm}(-1) = -1/2 \pm \sqrt{-3}/2 = \mathrm{e}^{\pm 2\pi \mathrm{i}/3}, \quad a+d=-1. \tag{8.25}$$

$a+d=1$ 时,

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1-d & -(d^2-d+1)/c \\ c & d \end{bmatrix}, \quad d^2-d+1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ |c|), \tag{8.26}$$

相应的三阶椭圆点是

$$\tau = (\lambda^{\pm}(1) - d)/c = (\mathrm{e}^{\pm \pi \mathrm{i}/3} - d)/c, \quad d^2-d+1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ |c|), \tag{8.27}$$

其中有且仅有一个属于 $\boldsymbol{H}^*$; $a+d=-1$ 时,

$$\alpha = \begin{bmatrix} -1-d & -(d^2+d+1)/c \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$d^2 + d + 1 \equiv 0(\bmod |c|), \tag{8.28}$$

相应的三阶椭圆点是

$$\tau = (\lambda^{\pm}(-1) - d)/c = (\mathrm{e}^{\pm 2\pi\mathrm{i}/3} - d)/c,$$

$$d^2 + d + 1 \equiv 0(\bmod |c|), \tag{8.29}$$

其中有且仅有一个属于 $\boldsymbol{H}^*$. 这就给出了所有的三阶椭圆元和三阶椭圆点.

综合以上讨论,就可得到关于完全模变换群 $\overline{\Gamma}$(即完全模群 Γ)的抛物元和椭圆元,及其在 $\boldsymbol{H}^*$ 上的抛物点和椭圆点的三个定理.

定理 8.2 (i) 完全模变换群 $\overline{\Gamma}$(即完全模群 Γ)的全体抛物元由式(8.18)和(8.20)给出;

(ii) 完全模变换群 $\overline{\Gamma}$(即完全模群 Γ)在 $\boldsymbol{H}^*$ 上的全体抛物点

$$\mathscr{E}_{\infty}(\overline{\Gamma}) = \{\infty\} \cup \{\boldsymbol{Q}\}, \tag{8.30}$$

它们组成 $\overline{\Gamma}$(即 Γ)的一个等价类;

(iii) 点∞的稳定子群

$$\Gamma_{\infty} = \{\pm T^n: n \in \boldsymbol{Z}\}, \quad \overline{\Gamma}_{\infty} = \{T^n: n \in \boldsymbol{Z}\}; \tag{8.31}$$

有理点$-s/r((s,r)=1,r>0)$的稳定子群

$$\Gamma_{-s/r} = \sigma^{-1}\Gamma_{\infty}\sigma = \{\pm (\sigma^{-1}T\sigma)^n: n \in \boldsymbol{Z}\}, \tag{8.32}$$

$$\overline{\Gamma}_{-s/r} = \sigma^{-1}\overline{\Gamma}_{\infty}\sigma = \{(\sigma^{-1}T\sigma)^n: n \in \boldsymbol{Z}\}, \tag{8.33}$$

其中 $\sigma \in \Gamma$ 是任意取定的,满足 $\sigma(-s/r) = \infty$.

证 (i) 已在(A)中证明. 由(A)知 $\overline{\Gamma}$ 的抛物点一定是有理点或∞,$\{\infty\} \cup \{\boldsymbol{Q}\}$是一个 Γ 等价类是显然的. 而任一有理点必可表为$-s/r, r>0, (s,r)=1$,且必有

$$\sigma = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in \Gamma, \quad \text{使得} \quad \sigma^{-1}(\infty) = -s/r. \tag{8.34}$$

故由定理 8.1(ii)知$-s/r$ 一定是抛物点,这就证明了(ii). 由(A)(ii)立即推出式(8.31). 由此及式(8.16)推出式(8.32)和(8.33). 证毕.

此外,容易算出,

$$\sigma^{-1}T^n\sigma = \begin{bmatrix} 1 + nsr & ns^2 \\ -nr^2 & 1 - nsr \end{bmatrix}, \tag{8.35}$$

它和 p,q 的取值无关. 由此即得

$$\Gamma_{-s/r}=\left\{\pm\begin{bmatrix}1+nsr & ns^2\\ -nr^2 & 1-nsr\end{bmatrix}: n\in \boldsymbol{Z}\right\},$$
$$\overline{\Gamma}_{-s/r}=\left\{\begin{bmatrix}1+nsr & ns^2\\ -nr^2 & 1-nsr\end{bmatrix}: n\in \boldsymbol{Z}\right\}. \qquad (8.36)$$

定理 8.3 (i) 完全模变换群 $\overline{\Gamma}$(即完全模群 Γ)的全体二阶椭圆元由式(8.22)给出；

(ii) 完全模变换群 $\overline{\Gamma}$(即完全模群 Γ)在 $\boldsymbol{H}^*$ 上的全体二阶椭圆点

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma})=\{(\mathrm{i}-s)/r: r>0,\ s^2\equiv -1 (\operatorname{mod} r)\} \qquad (8.37)$$

它们组成 $\overline{\Gamma}$(即 Γ)的一个等价类,等价于点 i;

(iii) 点 i 的稳定子群

$$\Gamma_{\mathrm{i}}=\{S^n: n=0,1,2,3\},\quad \overline{\Gamma}_{\mathrm{i}}=\{S^n: n=0,1\}; \qquad (8.38)$$

点$(\mathrm{i}-s)/r$ 的稳定子群

$$\Gamma_{(\mathrm{i}-s)/r}=\sigma^{-1}\Gamma_{\mathrm{i}}\sigma=\{(\sigma^{-1}S\sigma)^n: n=0,1,2,3\},$$
$$\overline{\Gamma}_{(\mathrm{i}-s)/r}=\sigma^{-1}\overline{\Gamma}_{\mathrm{i}}\sigma=\{(\sigma^{-1}S\sigma)^n: n=0,1\}, \qquad (8.39)$$

它们分别是四阶群和二阶群,其中 $\sigma\in\Gamma$ 是任意取定的,满足

$$\sigma((\mathrm{i}-s)/r)=\mathrm{i}.$$

证 (i) 已在(B)中证明. 式(8.38)容易直接验证,而式(8.39)则由(ii)及定理 8.1(ii)直接推出,所以只要来证(ii). 在(B)中已证明式(8.37)成立(为什么),显见,i 属于这集合,所以只要证明式(8.37)右边的集合是 $\overline{\Gamma}$ 的一个等价类. Γ 等价于 i 的点一定是:

$$\alpha(\mathrm{i})=(a\mathrm{i}+b)/(c\mathrm{i}+d)=(\mathrm{i}+ac+bd)/(c^2+d^2),$$

这里 $\alpha\in\Gamma$,由式(8.1)给出. 由上式可得

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=1+(ac+bd)^2,$$

取$-s=ac+bd$,$r=c^2+d^2$,就推出 $\alpha(\mathrm{i})$亦属于这集合. 因而剩下还要证明：任意一点

$$(\mathrm{i}-s)/r: r>0,\quad s^2\equiv -1(\operatorname{mod} r), \qquad (8.40)$$

一定和 i 是 Γ 等价的. 这就是要证明：对这样的$(\mathrm{i}-s)/r$ 一定存在

$$\sigma=\begin{pmatrix}x & y\\ u & v\end{pmatrix}\in\Gamma,\quad 使得\quad \sigma(\mathrm{i})=(\mathrm{i}-s)/r, \qquad (8.41)$$

即要证明：以下的 x,y,u,v 的不定方程有解：

$$u^2+v^2=r,\quad xu+yv=s,\quad xv-yu=1. \tag{8.42}$$

由条件 $r>0, s^2\equiv -1(\bmod r)$知(见[P&P3,第六章§3引理5]),必有 u_0,v_0 满足

$$u_0^2+v_0^2=r,\quad sv_0\equiv u_0(\bmod r),\quad (u_0,v_0)=1. \tag{8.43}$$

对取定的 u_0,v_0,一次不定方程 $v_0x-u_0y=1$ 的通解是:

$$x=\bar{x}+u_0t,\quad y=\bar{y}+v_0t,\quad t\in\mathbf{Z},$$

其中 $\bar{x},\bar{y}$ 是取定的一组特解. 进而有

$$xu_0+yv_0=\bar{x}u_0+\bar{y}v_0+rt.$$

利用式(8.43),(8.42)及条件 $s^2\equiv -1(\bmod r)$,可得到

$$\bar{x}u_0+\bar{y}v_0\equiv s(\bmod r).$$

所以必有 t_0 满足 $s=\bar{x}u_0+\bar{y}v_0+rt_0$. 容易验证:取

$$u=u_0,\quad v=v_0,\quad x=\bar{x}+u_0t_0,\quad 及\quad y=\bar{y}+v_0t_0,$$

由式(8.41)给出的 σ 就满足要求. 证毕.

最后,来讨论三阶椭圆元及三阶椭圆点.

定理 8.4 (i) 完全模变换群 $\bar{\Gamma}$(即完全模群 Γ)的全体三阶椭圆元由式(8.26)和(8.28)给出;

(ii) 完全模变换群 $\bar{\Gamma}$(即完全模群 Γ)在 $\boldsymbol{H}^*$ 上的全体三阶椭圆点

$$\mathscr{E}_\rho(\bar{\Gamma})=\{(\rho^\pm-s)/r:\ r>0,\ s^2\mp s+1\equiv 0(\bmod r)\}, \tag{8.44}$$

它们组成 $\bar{\Gamma}$(即 Γ)的一个等价类,等价于点 ρ,这里

$$\rho^\pm=\pm 1/2+\sqrt{-3}/2,\quad \rho=\rho^-=\mathrm{e}^{2\pi i/3}=(\rho^+)^2=\rho^+-1; \tag{8.45}$$

(iii) 点 ρ 的稳定子群

$$\Gamma_\rho=\{(ST)^n:\ n=0,\cdots,5\},\quad \bar{\Gamma}_\rho=\{(ST)^n:\ n=0,1,2\}; \tag{8.46}$$

点 $\xi=(\rho^\pm-s)/r$ 的稳定子群

$$\Gamma_\xi=\sigma^{-1}\Gamma_\rho\sigma=\{(\sigma^{-1}ST\sigma)^n:\ n=0,\cdots,5\},$$
$$\bar{\Gamma}_\xi=\sigma^{-1}\bar{\Gamma}_\rho\sigma=\{(\sigma^{-1}ST\sigma)^n:\ n=0,1,2\}, \tag{8.47}$$

它们分别是六阶群和三阶群,其中 $\sigma\in\Gamma$ 是任意取定的,满足

$$\sigma(\xi)=\rho.$$

证 (i) 已在(C)中证明. 式(8.46)容易直接验证,而式(8.47)则由(ii)及定理 8.1(ii)直接推出,所以只要来证(ii). 在(C)中已证明式(8.44)成立(为什么),显见,ρ 属于这集合,所以,只要证明式(8.44)右边的集合是 $\bar{\Gamma}$ 的一个等价类. Γ 等价于 ρ 的点一定是:

$$\alpha(\rho)=(a\rho+b)/(c\rho+d)=(a\rho+b)(c\bar{\rho}+d)/(c^2-cd+d^2)$$
$$=(\rho+ac+bd-bc)/(c^2-cd+d^2),$$

这里 $\alpha\in\Gamma$,由式(8.1)给出. 由上式可得

$$(a^2-ab+b^2)(c^2-cd+d^2)$$
$$=(ac+bd-bc)^2-(ac+bd-bc)+1,$$

取 $-s=ac+bd-bc$,$r=c^2-cd+d^2$,就推出 $\alpha(\rho)$ 亦属于这集合. 因而剩下还要证明:式(8.44)右边的集合中的任意一点一定和 ρ 是 Γ 等价的. 由 $\rho=\rho^-=\rho^+-1$ 知 ρ^- 和 ρ^+ 是 Γ 等价的,所以只要分别证明:(a) 任意一点

$$(\rho^+-s)/r:\ r>0,\ s^2-s+1\equiv 0(\operatorname{mod} r)$$

必和 ρ^+ 是 Γ 等价的;(b) 任意一点

$$(\rho^--s)/r=(\rho-s)/r:\ r>0,\ s^2+s+1\equiv 0(\operatorname{mod} r) \tag{8.48}$$

必和 $\rho^-=\rho$ 是 Γ 等价的. 我们来证明(b),(a)的证明是完全相同的,留给读者. (b)就是要证明:对这样的 $(\rho-s)/r$ 一定存在

$$\sigma=\begin{bmatrix}x & y\\ u & v\end{bmatrix}\in\Gamma,\quad 使得\quad \sigma(\rho)=(\rho-s)/r, \tag{8.49}$$

即要证明:以下的 x,y,u,v 的不定方程有解:

$$u^2-uv+v^2=r,\quad xu+yv-yu=-s,\quad xv-yu=1. \tag{8.50}$$

由条件 $r>0$,$s^2+s+1\equiv 0(\operatorname{mod} r)$ 知 r 必为奇数,所以这条件等价于

$$(2s+1)^2+3\equiv 0(\operatorname{mod} r).$$

因而(利用[P&P3,第六章 § 2 定理 4]),必有 u_0,v_0 满足

$$u_0^2-u_0v_0+v_0^2=r,\quad u_0\equiv -sv_0(\operatorname{mod} r),\quad (u_0,v_0)=1. \tag{8.51}$$

对取定的 u_0,v_0,一次不定方程 $v_0x-u_0y=1$ 的通解是:

$$x=\bar{x}+u_0t,\quad y=\bar{y}+v_0t,\quad t\in \boldsymbol{Z},$$

其中 $\bar{x},\bar{y}$ 是取定的一组特解. 进而有

$$xu_0+yv_0-yu_0=\bar{x}u_0+\bar{y}v_0-\bar{y}u_0+rt.$$

利用条件 $u_0\equiv -sv_0(\bmod r)$, 及 $s^2+s+1\equiv 0(\bmod r)$ 可得

$$\bar{x}u_0+\bar{y}v_0-\bar{y}u_0\equiv -s(\bmod r),$$

所以必有 t_0 满足 $-s=\bar{x}u_0+\bar{y}v_0-\bar{y}u_0+rt_0$. 容易验证：取

$$u=u_0,\quad v=v_0,\quad x=\bar{x}+u_0t_0,\quad 及\ y=\bar{y}+v_0t_0,$$

就有式(8.49)成立. 设 α 由式(8.1)给出, 容易看出 $\alpha(\rho)=\rho$ 的充要条件是

$$a^2+ac+c^2=1,\quad d=a+c,\quad b=-c.$$

由此可直接验证式(8.46)成立. 利用定理 8.1(ii), 由此及(ii)就推出(iii)的其余结论. 证毕.

§9 完全模群的基本区域

本节要讨论 $\boldsymbol{H}^*$ 关于完全模变换群 $\bar{\Gamma}$(即完全模群 Γ)的代表集合 $\{\bar{\Gamma}\backslash\boldsymbol{H}^*\}$(即 $\{\Gamma\backslash\boldsymbol{H}^*\}$), 证明它一定可以取为由一个单连通区域添加其部分边界所组成的区域, 即是一个基本区域. 我们先来证明

定理 9.1 设区域

$$\mathscr{F}=\mathscr{F}(\Gamma)=\mathscr{F}(\bar{\Gamma})=\{\tau\in:|\tau|>1,\ |\mathrm{Re}\tau|<1/2\},\tag{9.1}$$

$\overline{\mathscr{F}}=\overline{\mathscr{F}}(\Gamma)=\overline{\mathscr{F}}(\bar{\Gamma})$ 表示它的闭包(包含点∞)(见图 9.1). 那么, 对任一点 $\tau\in\boldsymbol{H}^*$, 必有 $\alpha\in\Gamma$, 使得 $\alpha(\tau)\in\overline{\mathscr{F}}$.

证 若 $\tau=\infty$, 则取 $\alpha=I$ 即可. 若 $\tau=-s/r, r>0, (r,s)=1$, 则必有 $\alpha\in\Gamma$ 使 $\alpha(-s/r)=\infty$. 所以只要讨论 $\tau\in\boldsymbol{H}$. 考虑以 $\tau,1$ 为基构成的格 $\Lambda=\Lambda(\tau,1)$, 由性质 1.3 知必有 $\omega_1,\omega_2\in\Lambda$ 满足: $\omega_1\neq\omega_2$, 对任意的 $\omega\in\Lambda$ 有 $|\omega|\geqslant|\omega_2|$, 对任意的 $\omega_2\neq\omega\in\Lambda$ 有 $|\omega|\geqslant|\omega_1|$, 以及 $\mathrm{Im}\omega_1/\omega_2>0$. 显见, 由 $0,\omega_1,\omega_2$ 构成的三角形上, 除 $0,\omega_1,\omega_2$ 外没有 Λ 中的其他格点. 这样, 由性质 1.5 的证明知, ω_1,ω_2 是 Λ 的一组基. 因而由性质 1.7(取 ω_1,ω_2 和 ω_1',ω_2' 为 $\tau,1$ 和 ω_1,ω_2)知, 存在 $\alpha\in\Gamma$ 使得

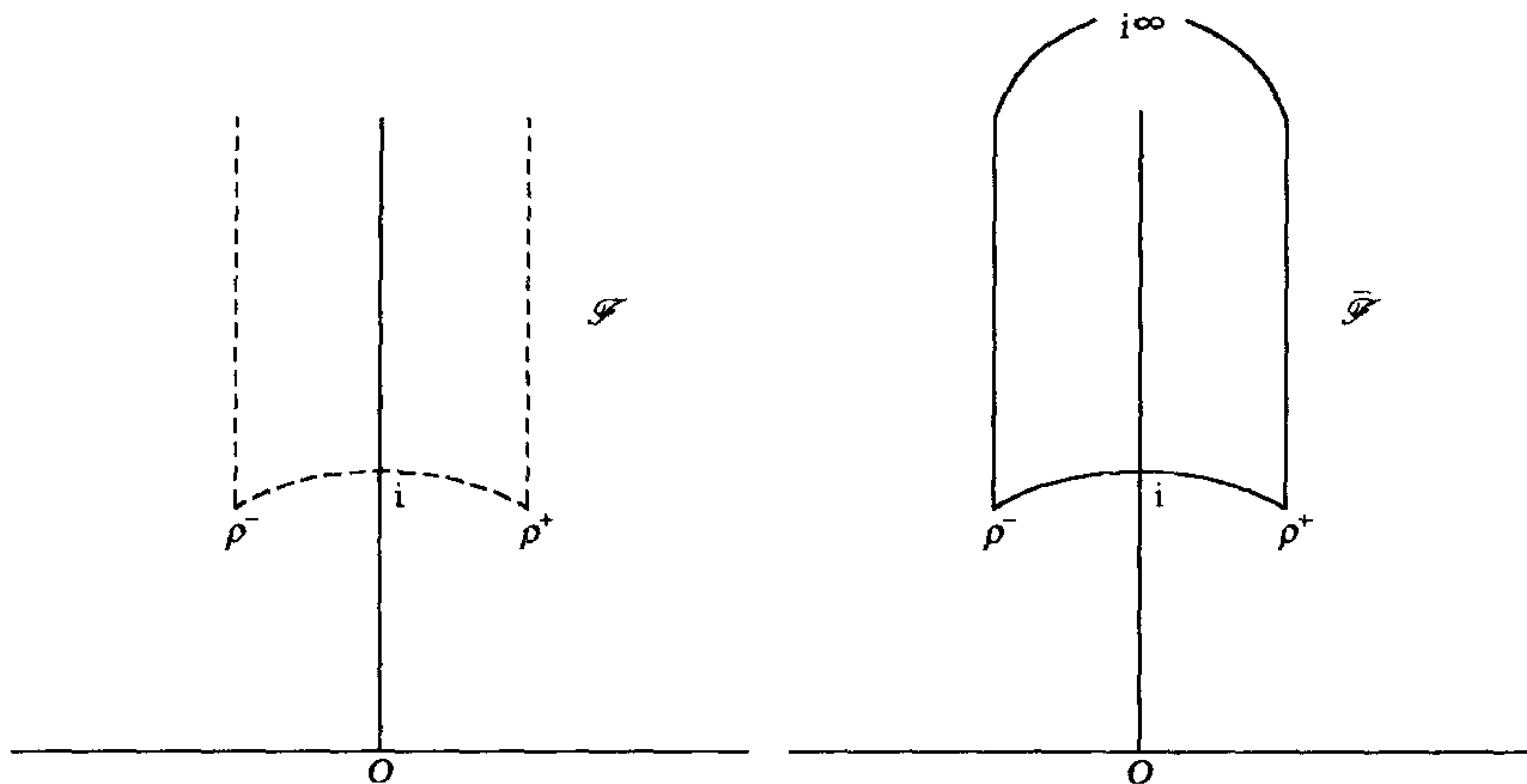


图 9.1

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}\tau\\ 1\end{pmatrix},$$

以及 $\tau' = \omega_1/\omega_2 = \alpha(\tau) \in \boldsymbol{H}$. 由 ω_1, ω_2 满足的条件推出：

$$|\tau'| \geqslant 1, \quad |\tau' \pm 1| = \left|\frac{\omega_1 \pm \omega_2}{\omega_2}\right| \geqslant \left|\frac{\omega_1}{\omega_2}\right| = |\tau'|.$$

以上第二个关系式就是 $|\mathrm{Re}\tau'| \leqslant 1/2$(为什么). 这就证明了

$$\alpha(\tau) \in \overline{\mathscr{F}}.$$

为了得到完全模群的基本区域,由定理 9.1 知只要在 $\overline{\mathscr{F}}$ 的 Γ 等价点中取定一点即可得到. 为此,先证明以下两个结论.

引理 9.2　设 $c \neq 0$, $\mathscr{F}$, $\overline{\mathscr{F}}$ 由定理 9.1 给出. 那么,(i) 当 $\tau \in \overline{\mathscr{F}}$ 时, $|c\tau + d| \geqslant 1$; (ii) 当 $\tau \in \overline{\mathscr{F}}$ 时, $|c\tau + d| = 1$ 的充要条件是：

$$c = \pm 1, \quad d = 0, \quad \tau = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad \pi/3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3; \tag{9.2}$$

$$cd = 1, \quad \tau = \rho = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}; \tag{9.3}$$

或

$$cd = -1, \quad \tau = 1 + \rho = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}. \tag{9.4}$$

证　当 $\tau \in \overline{\mathscr{F}}$ 时有

$$\begin{aligned}|c\tau + d|^2 &= c^2|\tau|^2 + 2cd\mathrm{Re}\tau + d^2 \geqslant c^2 - |cd| + d^2\\ &= (|c| - |d|)^2 + |cd| \geqslant 1.\end{aligned}$$

这就证明了(i). 显见，上式中第一个不等号中等号成立的充要条件是：$|\tau|=1, d=0$；$\mathrm{Re}\tau=-1/2, cd=1$；或 $\mathrm{Re}\tau=1/2, cd=-1$，而第二个不等号中等号成立的充要条件是：$d=0, c=\pm1$；或 $|cd|=1$. 而 $|c\tau+d|=1$ 就是要这两个等号同时成立. 由此不难验证(ii)成立.

定理 9.3 (i) $\overline{\mathscr{F}}$ 上关于 Γ 的所有不动点是：$\infty, \mathrm{i}, \rho(=\rho^-)$ 和 $1+\rho(=\rho^+)$； (ii) $\overline{\mathscr{F}}$ 上关于 Γ 的所有等价点是：

$$-1/2+\mathrm{i}t \quad 和 \quad 1/2+\mathrm{i}t, \quad \sqrt{3}/2 \leqslant t < \infty; \tag{9.5}$$

$$\rho(=\rho^-) \quad 和 \quad 1+\rho(=\rho^+); \tag{9.6}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad 和 \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}, \quad \pi/3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3, \quad \theta \neq \pi/2. \tag{9.7}$$

证 设 $\tau_1, \tau_2 \in \overline{\mathscr{F}}$，$\tau_2=\sigma(\tau_1)$，其中

$$\pm I \neq \sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma.$$

这样，当 $\tau_1=\tau_2$ 时就给出了不动点，当 $\tau_1 \neq \tau_2$ 时就给出了等价点. 当 $c=0$ 时，$\tau_2=\tau_1+n(n\neq0)$. 因此，点∞是不动点. 当 $\tau_1\neq\tau_2$ 时，由于 $|\mathrm{Re}\tau_j|\leqslant1/2, \mathrm{Im}\tau_j\geqslant\sqrt{3}/2, j=1,2$，就推出 $n=\pm1$. 因而有等价点(9.5). 当 $c\neq0$ 时，由式(1.15)知，

$$\mathrm{Im}\tau_2 = \mathrm{Im}\tau_1/|c\tau_1+d|^2, \quad \mathrm{Im}\tau_1 = \mathrm{Im}\tau_2/|-c\tau_2+a|^2.$$

由此推出必有 $|c\tau_1+d||-c\tau_2+a|=1$. 由于 $\tau_1, \tau_2 \in \overline{\mathscr{F}}$，所以由引理 9.2(i)知

$$|c\tau_1+d| = |-c\tau_2+a| = 1.$$

由此及引理 9.2(ii)就可得到满足上式的 c, d, a, τ_1 及 τ_2 的所有各种情形. 下面来逐一验证.

(a) $d=0, c=\pm1$. 这时有

$$b=\mp1, \quad \tau_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad \pi/3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3.$$

若 $a=0$，则有 $\tau_2=-1/\tau_1$. 因而有不动点 $\tau_1=\tau_2=\mathrm{i}$，及等价点(9.7)；

若 $a=1$，则有 $\tau_2=\pm1-1/\tau_1$. 因而有不动点

$$\tau_1=\tau_2=\rho^{\pm}, \quad c=\pm1;$$

若 $a=-1$，则有 $\tau_2=\mp1-1/\tau_1$. 因而有不动点

$$\tau_1=\tau_2=\rho^{\mp}, \quad c=\pm1.$$

(b) $cd=1$. 这时 $\tau_1=\rho^-$.

若 $a=0$,则 $b=-c,\tau_2=-1/(\tau_1+1)$. 因而有不动点

$$\tau_1=\tau_2=\rho^-;$$

若 $a=1,c=1$,则 $b=0,\tau_2=\rho^+$. 因而有等价点

$$\tau_1=\rho^-,\quad \tau_2=\rho^+;$$

若 $a=-1,c=-1$,则 $b=0,\tau_2=\rho^+$. 因而有等价点

$$\tau_1=\rho^-,\quad \tau_2=\rho^+.$$

容易验证(留给读者): $a=-1,c=1$; $a=1,c=-1$ 这两种情形不可能出现.

(c) $cd=-1$. 这时 $\tau_1=\rho^+$.

若 $a=0$,则 $b=-c,\tau_2=-1/(\tau_1-1)$. 因而有不动点

$$\tau_1=\tau_2=\rho^+;$$

若 $a=1,c=-1$,则 $d=1,b=0,\tau_2=\rho^-$. 因而有等价点

$$\tau_1=\rho^+,\quad \tau_2=\rho^-;$$

若 $a=-1,c=1$,则 $d=-1,b=0,\tau_2=\rho^-$. 因而有等价点

$$\tau_1=\rho^+,\quad \tau_2=\rho^-.$$

容易验证(留给读者): $a=1,c=1;a=-1,c=-1$ 这两种情形不可能出现.

综合以上讨论就证明了定理.

由定理 9.1 和 9.3 立即推出

定理 9.4　设 $\mathscr{F}$ 由定理 9.1 给出. 那么,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^* &= \mathscr{F}^*(\Gamma) = \mathscr{F}^*(\bar{\Gamma}) \\ &= \mathscr{F} \cup \{\infty\} \cup \{\sqrt{3}/2 < t < \infty\} \\ &\quad \cup \{e^{i\theta}: \pi/2 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3\}\end{aligned} \tag{9.8}$$

是 $\boldsymbol{H}^*$ 关于完全模变换群 $\bar{\Gamma}$(即完全模群 Γ)的基本区域(见图 9.2). 在 $\mathscr{F}^*$ 中有且仅有的 $\bar{\Gamma}$(即 Γ)的三个不动点是: 抛物点(尖点)∞,二阶椭圆点 i,及三阶椭圆点 ρ.

应该指出,在定理 9.3 的证明中同时求出了迷向子群 Γ_∞,Γ_i,和 Γ_ρ(为什么),请读者根据定理 9.3 的证明写出这些迷向子群,从而看出这和定理 8.1,8.2 和 8.3 的结果是一样的. 此外,我们知道,不动

点的等价点一定也是不动点. 由于 $\boldsymbol{H}^*$ 中的每一点和且仅和 $\mathscr{F}^*$ 中的一点是 Γ 等价的, 所以, $\boldsymbol{H}^*$ 中的全部 Γ 不动点由且仅由 ∞, i, ρ 确定的三个 Γ 等价类所给出. 容易证明(留给读者): 这就是在定理 8.1, 8.2 和 8.3 中给出的三个 Γ 等价类. 因此, 利用定理 9.4 关于基本区域的结论又给出了这三个定理的证明.

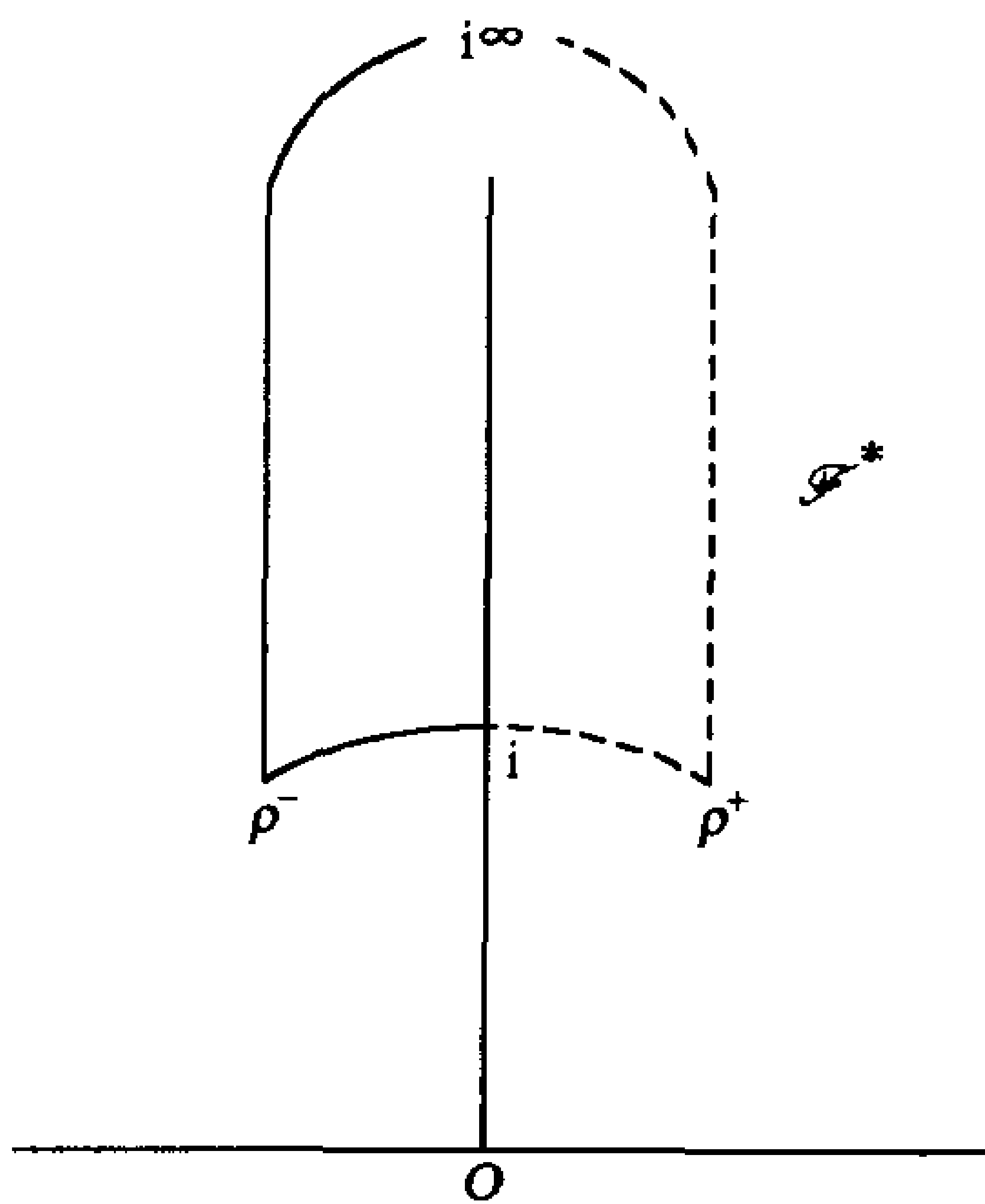


图 9.2

$\mathscr{F}^*$ 只是 Γ 的基本区域的一种最基本的形式. 若把 $\mathscr{F}^*$ 分为若干不相交部分之和:

$$\mathscr{F}^* = \mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2 \cup \cdots \cup \mathscr{F}_{k-1} \cup \mathscr{F}_k, \tag{9.9}$$

那么, 对任意的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}, \alpha_k \in \Gamma$,

$$G^* = \alpha_1(\mathscr{F}_1) \cup \alpha_2(\mathscr{F}_2) \cup \cdots \cup \alpha_{k-1}(\mathscr{F}_{k-1}) \cup \alpha_k(\mathscr{F}_k), \tag{9.10}$$

一定是 $\Gamma\backslash\boldsymbol{H}^*$ 的一个代表集合(为什么). 如果 G^* 是由一个单连通区域及其部分边界构成, 那么, 它也是 Γ 的基本区域. 用这样的方法可以构造各种形式的基本区域. 事实上, 以上的讨论以任一基本区域代替 $\mathscr{F}^*$ 均成立. 下面来举例说明(需要证明之处都留给读者).

(i) 首先取 $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}^*$. 这时, 对任意的 $\alpha \in \Gamma$, $\alpha(\mathscr{F}^*)$ 都是 Γ 的基本区域. 当 $\alpha_1 \neq \pm\alpha_2$ 时, $\alpha_1(\mathscr{F}^*)$ 和 $\alpha_2(\mathscr{F}^*)$ 除了可能以 Γ 的不动点为公共点外, 没有其他公共点. 对取定的基本区域 $\sigma(\mathscr{F}^*)$ ($\sigma \in \Gamma$), 在所有的基本区域 $\alpha(\mathscr{F}^*)$, $\alpha \in \Gamma$ 中, 和 $\sigma(\mathscr{F}^*)$ 有公共边界(边界本身不要求属于基本区域)的是且仅是: $\sigma T^{-1}(\mathscr{F}^*)$, $\sigma T(\mathscr{F}^*)$, 及 $\sigma S(\mathscr{F}^*)$(为什么). 当 $\sigma = \pm I$ 时, 和 $\mathscr{F}^*$ 有公共边界的是且仅是 $T^{-1}(\mathscr{F}^*)$, $T(\mathscr{F}^*)$, 及 $S(\mathscr{F}^*)$(见图 9.3). 对每一点 $\tau \in \boldsymbol{H}^*$, 如果它不是 Γ 的不动点, 那么它仅属于某一个基本区域 $\gamma^{-1}(\mathscr{F}^*)$, 这里 $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(\tau) \in \mathscr{F}^*$. 如果 τ 是 Γ 的不动点, 那么,

(a) 它等价于点 ∞, 即是抛物点时, 设 $\gamma_1 \in \Gamma$, $\gamma_1(\tau) = \infty$, 这时, τ 属于且仅属于以下无穷多个基本区域:

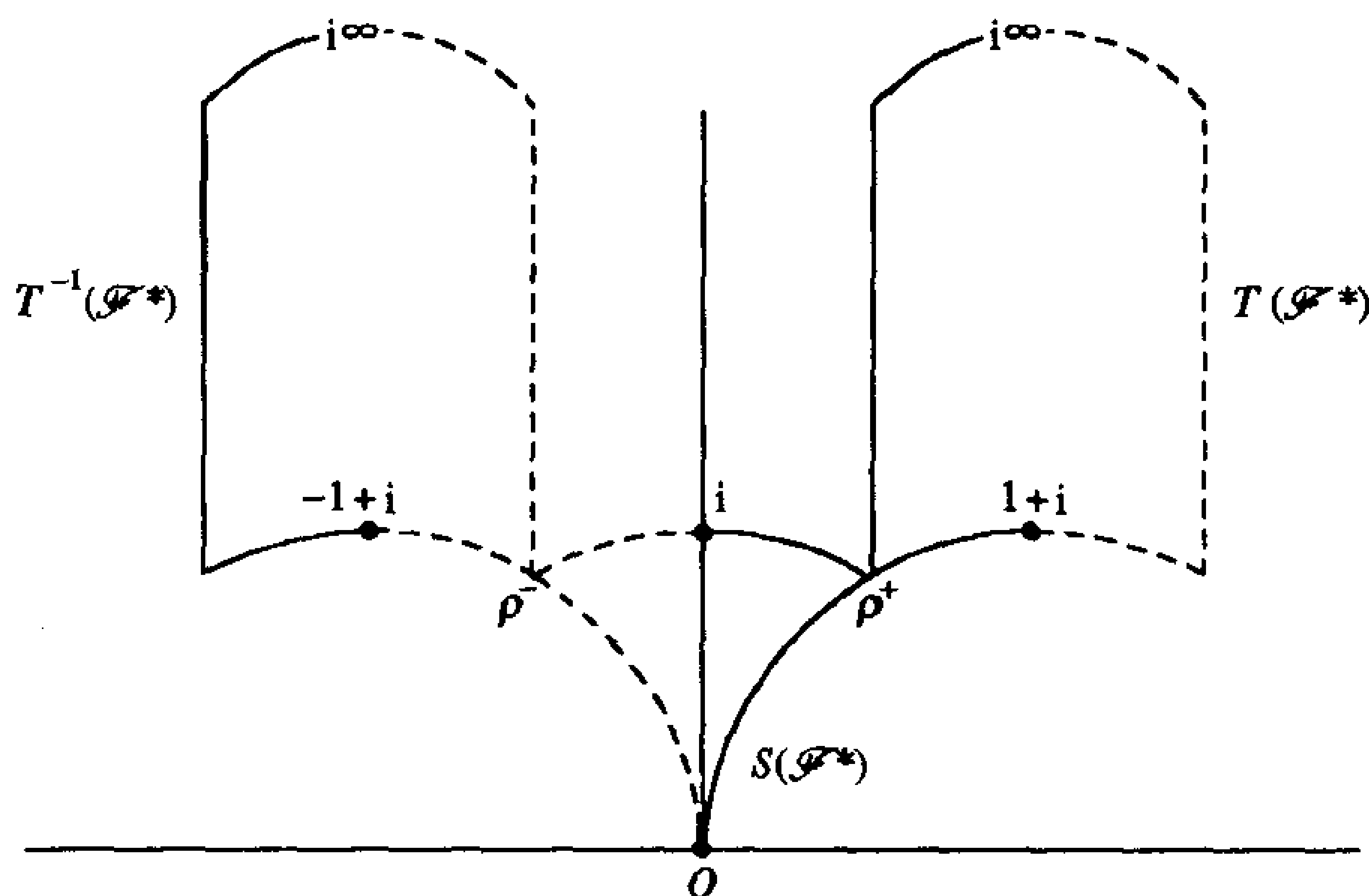


图 9.3

$$\gamma_1^{-1}\alpha(\mathscr{F}^*),\quad \alpha = T^n,\quad n\in \mathbf{Z},\quad 即\quad \alpha\in\overline{\Gamma}_\infty;\tag{9.11}$$

(b) 它等价于点 i，即是二阶椭圆点时，设 $\gamma_2\in\Gamma,\gamma_2(\tau)=\mathrm{i}$，这时 τ 仅属于以下两个基本区域：

$$\gamma_2^{-1}\alpha(\mathscr{F}^*),\quad \alpha = S^n,\quad n=0,1,\quad 即\quad \alpha\in\overline{\Gamma}_{\mathrm{i}};\tag{9.12}$$

(c) 它等价于 $\rho(=\rho^-)$，即是三阶椭圆点时，设 $\gamma_3\in\Gamma,\gamma_3(\tau)=\rho$，这时 τ 仅属于以下三个基本区域：

$$\gamma_3^{-1}\alpha(\mathscr{F}^*),\quad \alpha = (-ST)^n,\quad n=0,1,2,\quad 即\quad \alpha\in\overline{\Gamma}_\rho.\tag{9.13}$$

(ii) 现把 $\mathscr{F}^*$ 分为

$$\mathscr{F}^* = \mathscr{F}_1\cup\mathscr{F}_2\cup\mathscr{F}_3\cup\mathscr{F}_4\cup\mathscr{F}_5\cup\{\infty\}\cup\{\mathrm{i}\}\cup\{\rho\},\tag{9.14}$$

其中(参见图 9.2)

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1 &= \{\tau:\ |\tau|>1,\ -1/2<\operatorname{Re}\tau<0\},\\
\mathscr{F}_2 &= \{\tau:\ |\tau|>1,0<\operatorname{Re}\tau<1/2\},\\
\mathscr{F}_3 &= \{\tau:\ \operatorname{Re}\tau=0,\operatorname{Im}\tau>1\},\\
\mathscr{F}_4 &= \{\tau:\ \operatorname{Re}\tau=-1/2,\operatorname{Im}\tau>\sqrt{3}/2\},\\
\mathscr{F}_5 &= \{\tau:\ \tau=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\pi/2<\theta<2\pi/3\}.
\end{aligned}\tag{9.15}$$

那么，

$$G_1^* = T(\mathscr{F}_1)\cup\mathscr{F}_2\cup\mathscr{F}_3\cup T(\mathscr{F}_4)$$

$$\cup T(\mathscr{F}_5) \cup \{\infty\} \cup \{\mathrm{i}\} \cup \{T(\rho)\}; \qquad (9.16)$$

$$G_2^* = T(\mathscr{F}_1) \cup \mathscr{F}_2 \cup \mathscr{F}_3 \cup T(\mathscr{F}_4)$$
$$\cup S(\mathscr{F}_5) \cup \{\infty\} \cup \{\mathrm{i}\} \cup \{T(\rho)\}; \qquad (9.17)$$

$$G_3^* = \mathscr{F}_1 \cup S(\mathscr{F}_2) \cup \mathscr{F}_3 \cup \mathscr{F}_4 \cup \mathscr{F}_5$$
$$\cup \{\infty\} \cup \{\mathrm{i}\} \cup \{\rho\}; \qquad (9.18)$$

$$G_4^* = \mathscr{F}_1 \cup S(\mathscr{F}_2) \cup \mathscr{F}_3 \cup \mathscr{F}_4 \cup \mathscr{F}_5$$
$$\cup \{S(\infty)\} \cup \{\mathrm{i}\} \cup \{\rho\}; \qquad (9.19)$$

$$G_5^* = \mathscr{F}_1 \cup T^{-1}(\mathscr{F}_2) \cup \mathscr{F}_3 \cup \mathscr{F}_4 \cup \mathscr{F}_5$$
$$\cup \{\infty\} \cup \{\mathrm{i}\} \cup \{\rho\} \qquad (9.20)$$

都是基本区域(见图 9.4～9.8).

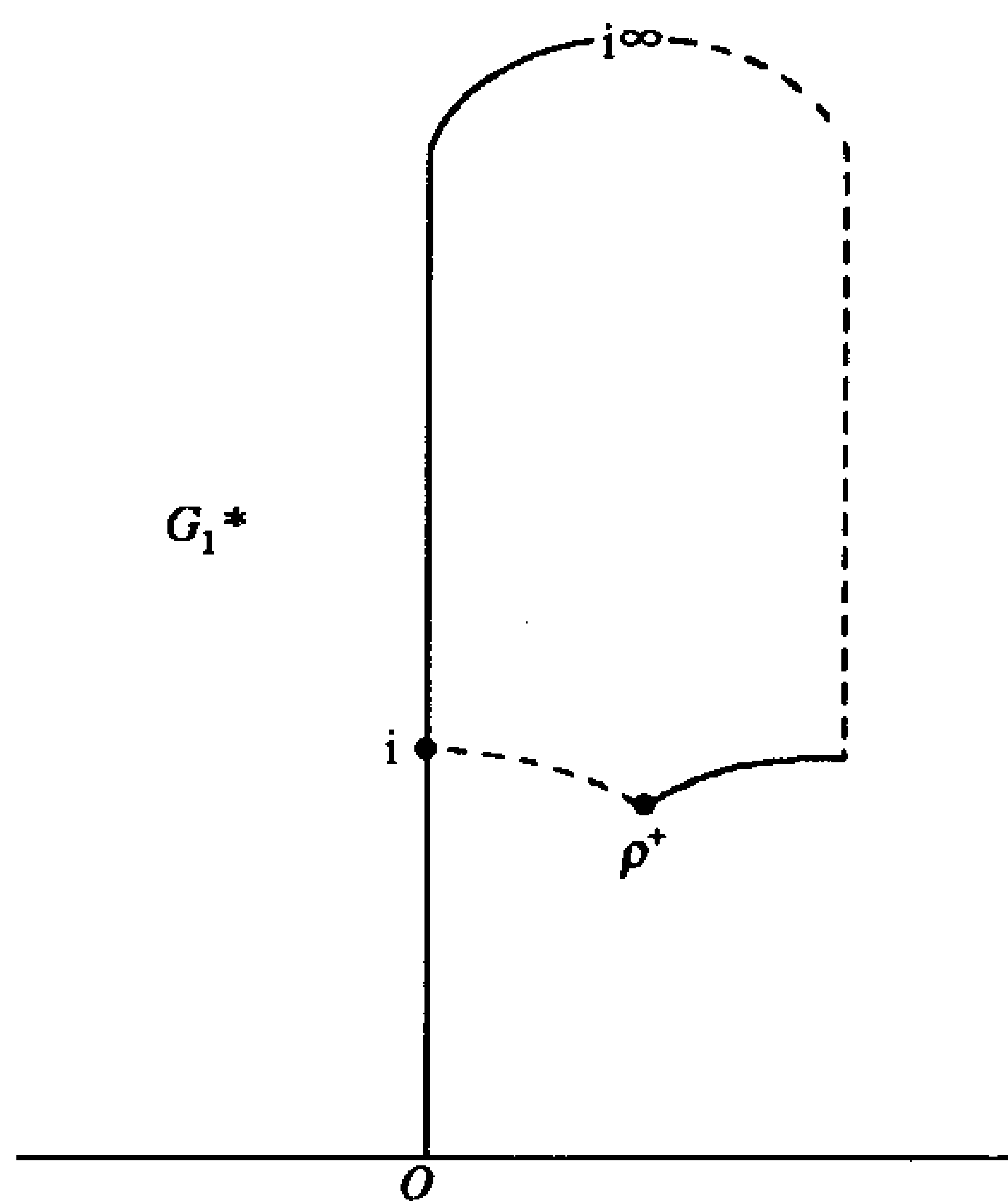


图 9.4

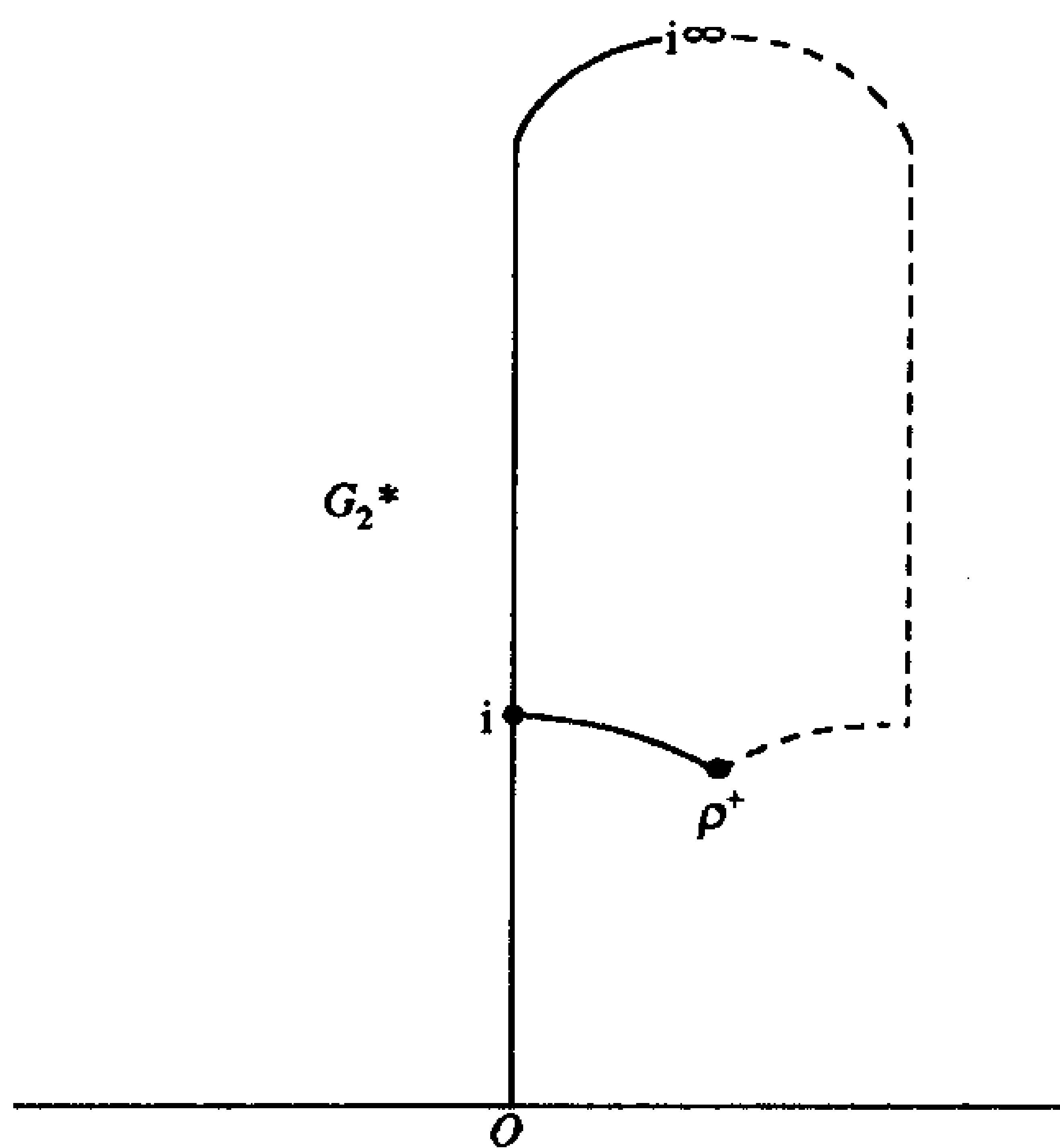


图 9.5

在以上所举的所有基本区域中,总有一个不动点在其闭包上有一个等价点.最后,我们来举一个不同的例子.

(iii) 取定一点 $\tau_0 = 1/2 + \mathrm{i}t_0, t_0 > \sqrt{3}/2$. 作一通过点 i 和 τ_0 的圆,其圆心在实轴上(这圆是惟一确定的),它与圆 $|\tau+1|=1$ 交于 τ_1. 把以 $1+\rho(=\rho^+)$, τ_0, i 为顶点,以直线与圆弧为边的曲边三角形所围成的开区域记作 $\mathscr{F}'_1$,容易证明 $S(\mathscr{F}_1)$就是以 $\rho(=\rho^-)$, τ_1, i 为顶点,以圆弧为边的曲边三角形所围成的开区域(见图 9.9). 现把

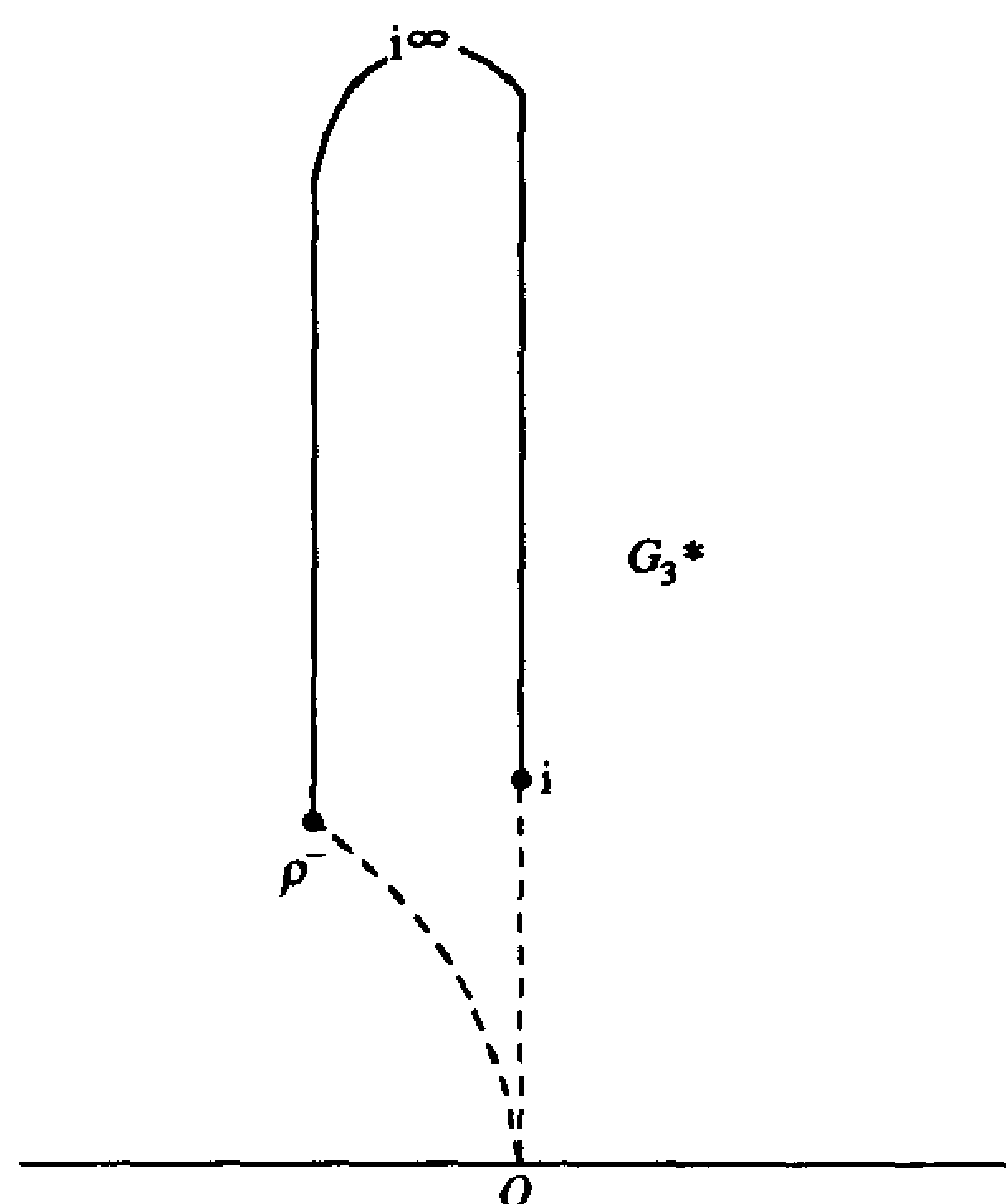


图 9.6

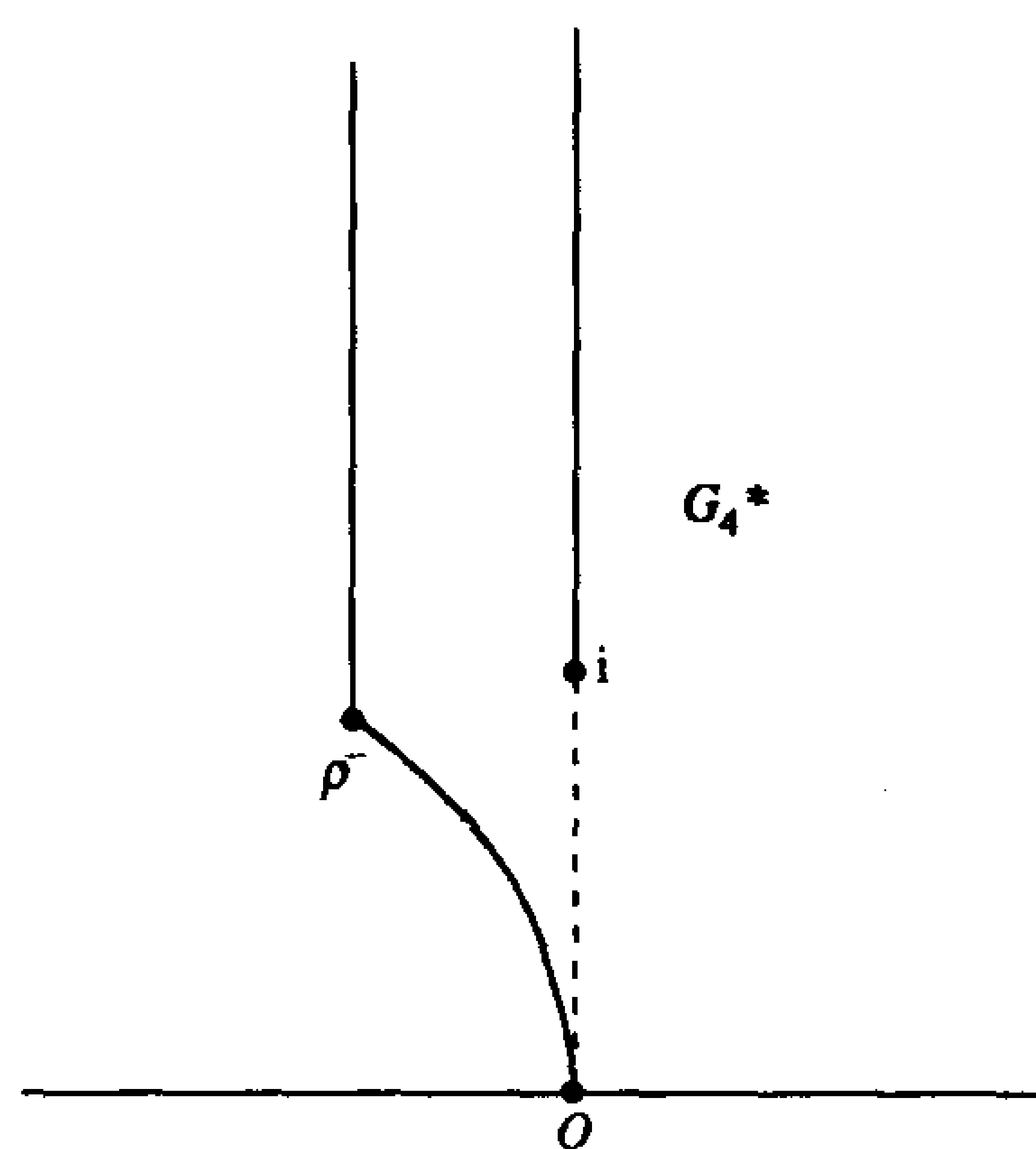


图 9.7

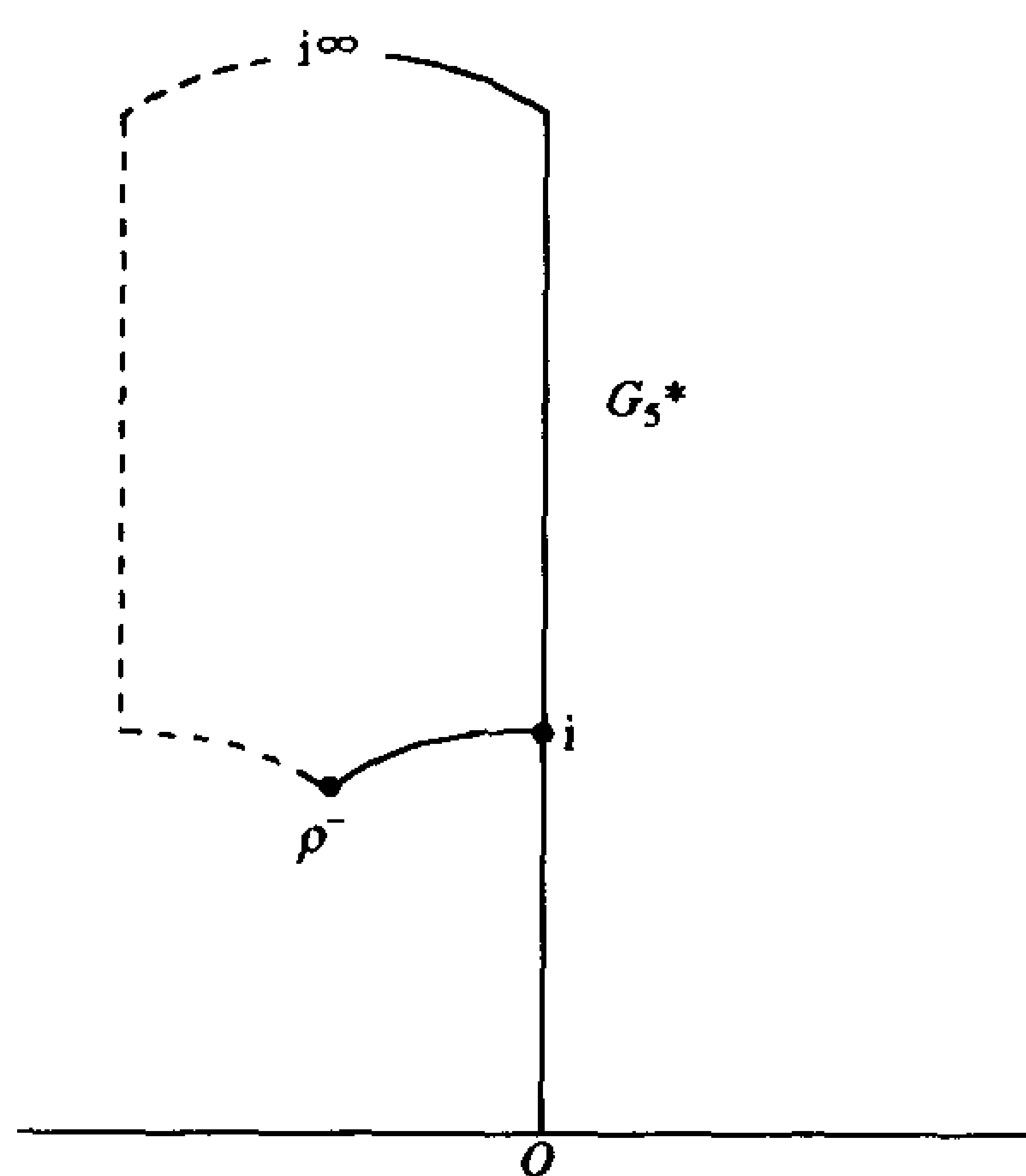


图 9.8

$\mathscr{F}^*$分为

$$\mathscr{F}^* = \mathscr{F}_1' \cup \mathscr{F}_2', \quad \mathscr{F}_2' = \mathscr{F}^* \backslash \mathscr{F}_1'.$$

这样

$$G_6^* = S(\mathscr{F}_1') \cup \mathscr{F}_2' \tag{9.21}$$

就是图 9.9 所示的 Γ 的基本区域. 它的特点是属于它的三个不动点

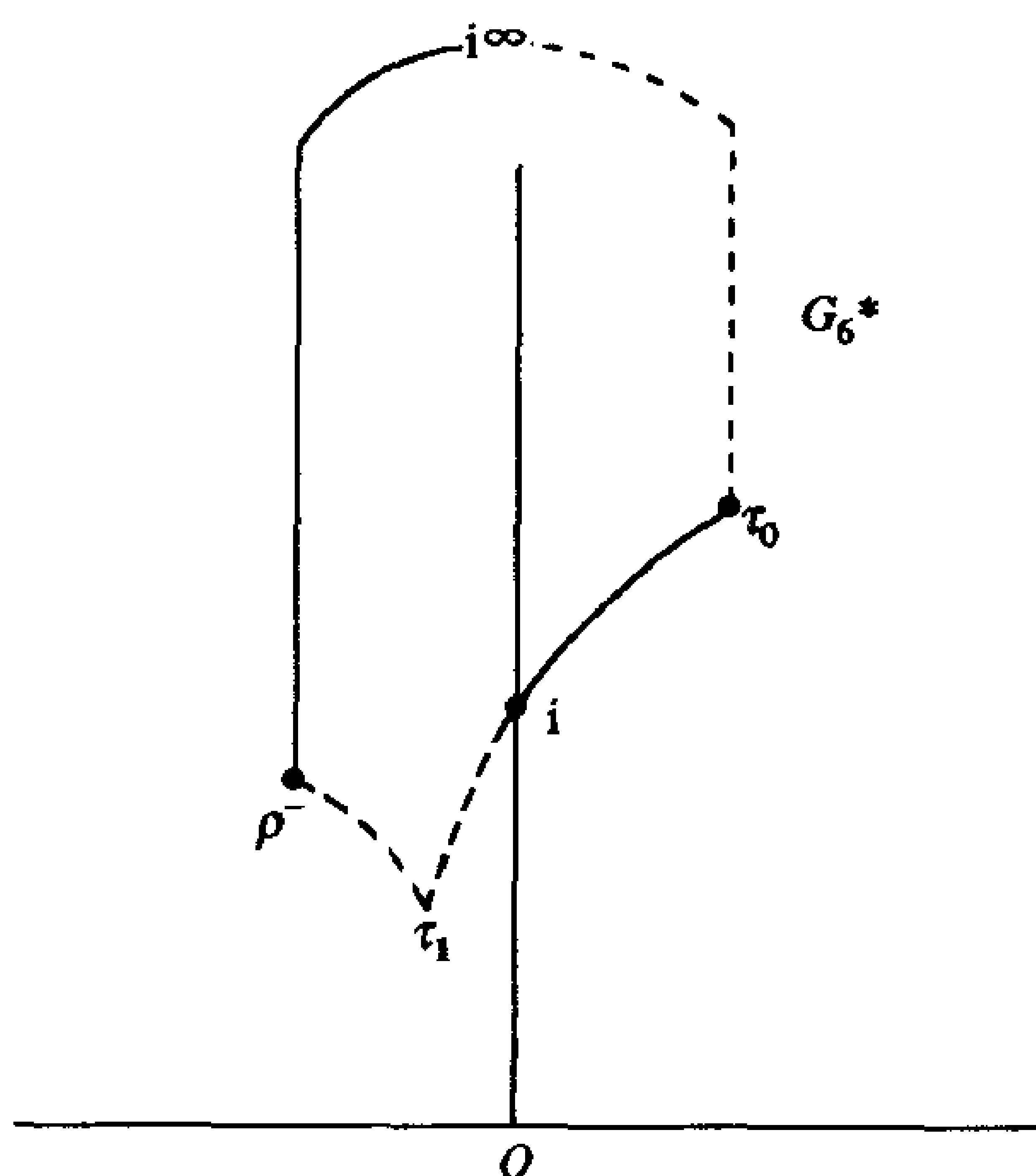


图 9.9

∞,i 和 ρ 在其闭包上没有别的等价点. 若令 $t_0\to+\infty$,则 G_6^* 就变为 G_3^*;若取 $t_0=+\infty$,则 G_6^* 就是 G_4^*.

下面我们继续来讨论 Γ 的基本区域 $\alpha(\mathscr{F}^*)(\alpha\in\Gamma)$. 为以后叙述方便,我们来引进测地线的概念.

定义 9.1 设完全上半平面 $\overline{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{H}\cup\{\infty\}\cup\{\boldsymbol{R}\}$(即上半平面 $\boldsymbol{H}$ 添加无穷远点及实轴). $\overline{\boldsymbol{H}}$ 中的(i) 圆心在实轴上的半圆;(ii) 实部为常数的半直线(可看作是以∞为圆心的半圆)称为**测地线**.

容易证明(留给读者):

定理 9.5 (i) 对 $\overline{\boldsymbol{H}}$ 中任意给定的不同的两点(包括点∞),有且仅有一条测地线通过这两点;(ii) 对任一 $\alpha\in SL_2(\boldsymbol{R})$,辛变换 $\tau'=\alpha(\tau)$把测地线变为测地线.

定义 9.2 给定 $\overline{\boldsymbol{H}}$ 中的不在同一测地线上的三点(包括点∞) A,B 和 C,由连接它们三条测地线段构成的曲边三角形称为是 $\overline{\boldsymbol{H}}$ 中**以 A,B,C 为顶点的测地三角形**. 以点∞,ρ 和 $1+\rho$ 为顶点的测地三角形 Δ_0,及所有的测地三角形 $\alpha(\Delta_0)$,$\alpha\in\Gamma$(即以 $\alpha(\infty)$,$\alpha(\rho)$,$\alpha(1+\rho)$为顶点的测地三角形),均称为是**模三角形**. 以点∞,ρ 和 i 为顶点的测地三角形 Δ_1,以点∞,i 和 $1+\rho$ 为顶点的测地三角形 Δ_2,及所有的测地三角形 $\alpha(\Delta_1)$(即以 $\alpha(\infty)$,$\alpha(\rho)$,$\alpha(\text{i})$为顶点的测地三角

形），$\alpha(\Delta_2)$（即以 $\alpha(\infty)$，$\alpha(\mathrm{i})$，$\alpha(1+\rho)$ 为顶点的测地三角形），$\alpha\in\Gamma$，均称为是**半模三角形**.

这样，若不计 Γ 等价点，Γ 的基本区域 $\mathscr{F}^*$ 就是模三角形 Δ_0，基本区域 $\alpha(\mathscr{F}^*)$ 就是模三角形 $\alpha(\Delta_0)$. 显见，所有的模三角形恰好给出了 $\boldsymbol{H}^*$ 的一个不重叠的覆盖（见图 9.10 及 9.11）. 同样，所有的半模三角形也恰好给出了 $\boldsymbol{H}^*$ 的一个不重叠的覆盖（见图 9.12）. 在构造基本区域 G_6^*（见式(9.21)）中所取的 $\mathscr{F}_1'$ 的边界就是以 $1+\rho$，τ_0 及 i 为顶点的测地三角形，而 $S(\mathscr{F}_1')$ 的边界就是以 ρ，τ_1 及 i 为顶点的测地三角形.

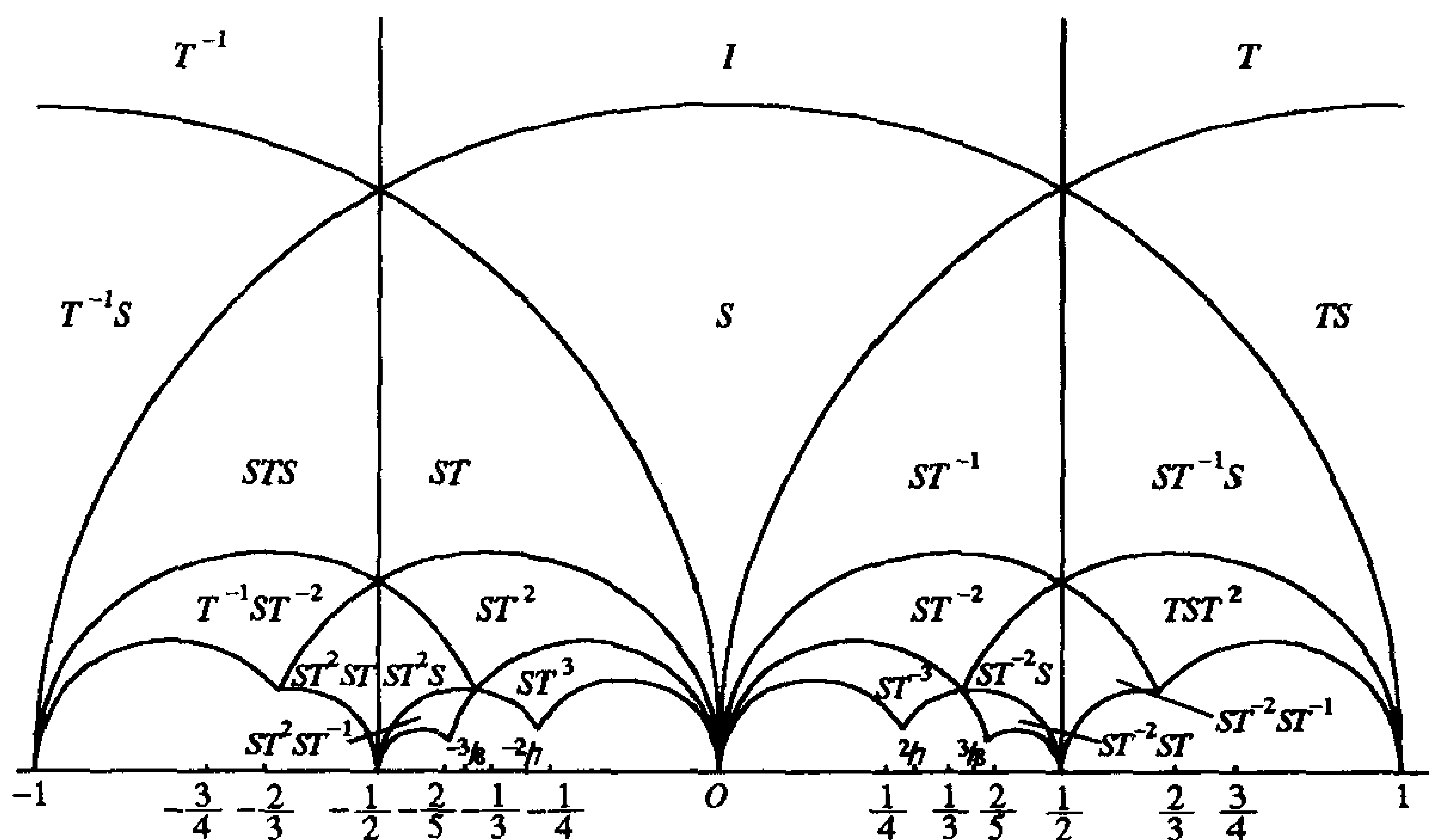


图 9.10

在 §5 已经指出：完全模群 Γ 的权为 k 的模函数 $F(\tau)$ 就是指对任一 $\alpha\in\Gamma$，满足关系式(5.18)（即(5.20)）的 $\boldsymbol{H}$ 上的半纯函数. 这关系式表明了：$F(\tau)$ 只要在 Γ 的任一基本区域上的值确定后，它在 $\boldsymbol{H}^*$ 上的值就完全确定了，以及这类函数对模变换具有某种不变性，即在不同的基本区域上它的性质实质上是一样的. 因此，为了适合于模函数的研究，在 $\boldsymbol{H}^*$ 上引入相应的拓扑，以及在模变换下不变的测度是必要的. 下面先来讨论前者，后者则是下一节的内容.

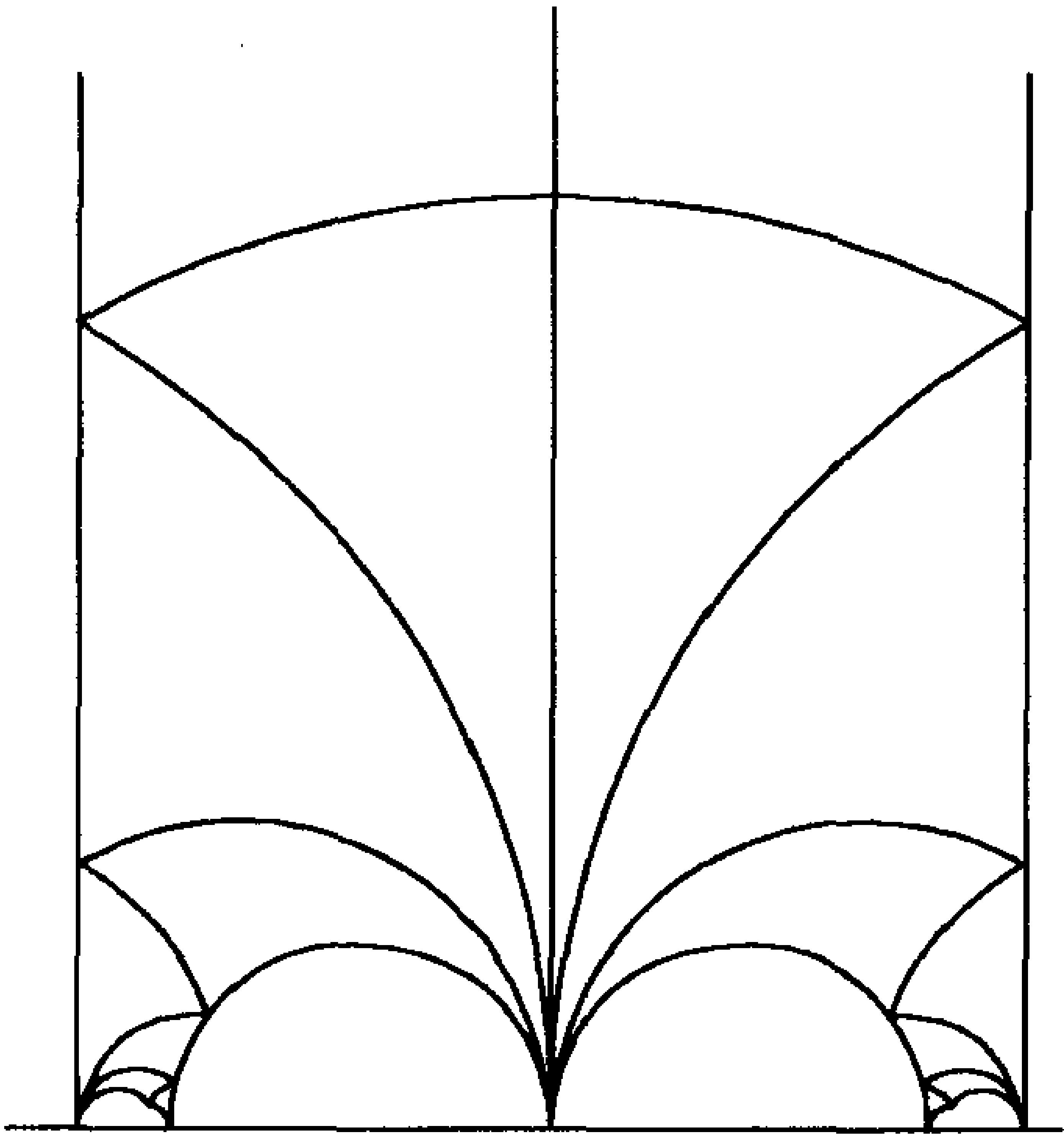


图 9.11

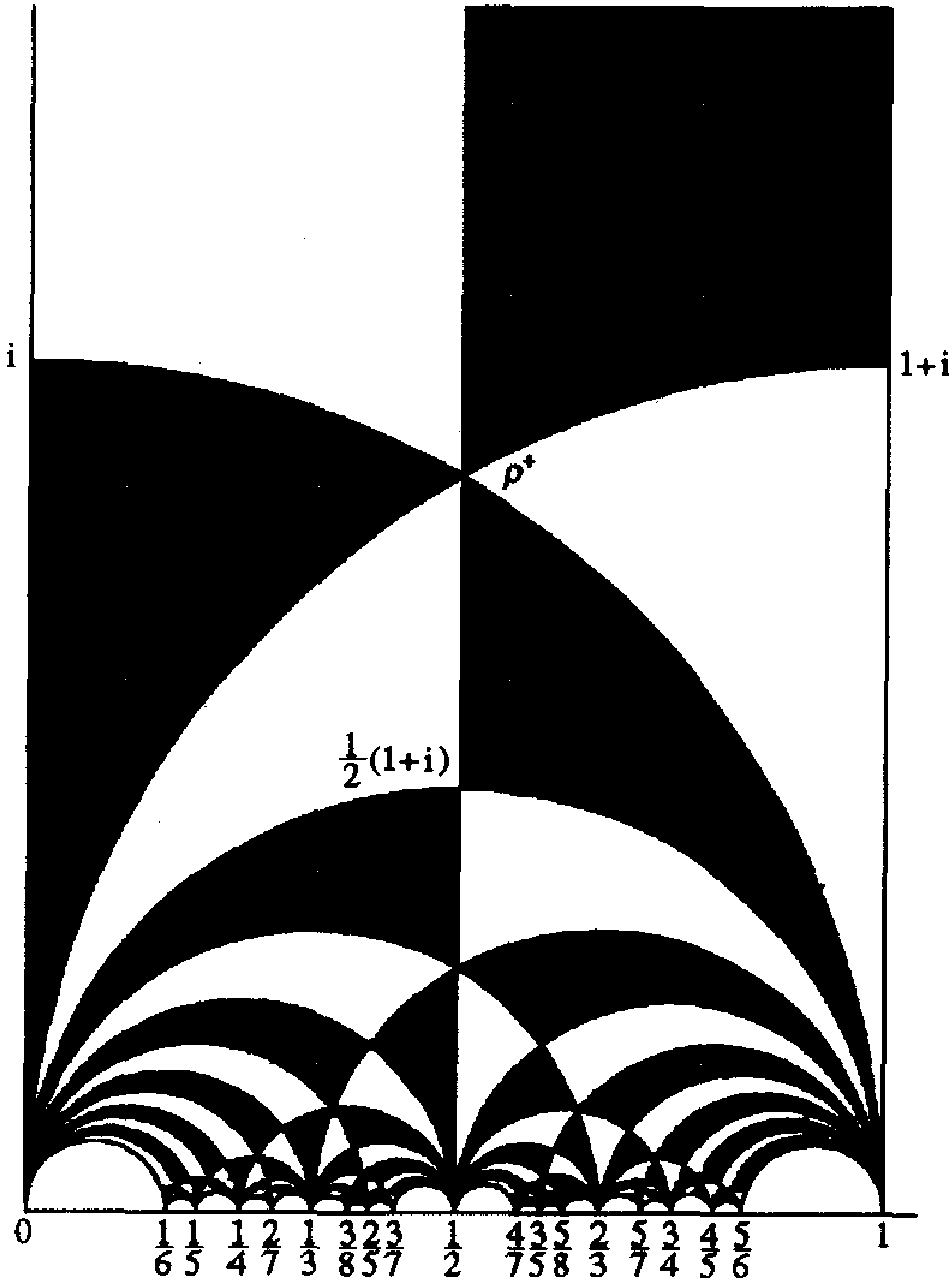

i
1+i
ρ^+
$\frac{1}{2}(1+i)$
0
$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$
1

图 9.12

H^* 中的点的邻域及点列的极限点的概念

先来讨论邻域的概念.

(i) 点 $\tau_0 \in \boldsymbol{H}$,即 τ_0 不是抛物点.对给定的 $\delta>0$,点 τ_0 在 $\boldsymbol{H}^*$ 中的 δ-邻域是:

$$Q(\tau_0;\delta,\boldsymbol{H}^*) = Q(\tau_0;\delta) \cap \boldsymbol{H}^*, \qquad (9.22)$$

其中

$$Q(\tau_0;\delta) = \{\tau:\ |\tau-\tau_0| < \delta\}, \qquad (9.23)$$

当 δ 适当小时整个邻域属于 $\boldsymbol{H}$;

(ii) 点 $\tau_0=\infty$.它是抛物点.对给定的正数 $A>0$,抛物点 ∞ 在 $\boldsymbol{H}^*$ 中的 A-邻域是:

$$Q(\infty;A,\boldsymbol{H}^*) = \{\tau:\ \mathrm{Im}\tau > A\}; \qquad (9.24)$$

(iii) 点 $\tau_0=-s/r, r>0, (s,r)=1$.它是抛物点.设 $\sigma_0(-s/r)=\infty, \sigma_0\in\Gamma$.对给定的正数 $A>0$,抛物点 $-s/r$ 在 $\boldsymbol{H}^*$ 中的 A-邻域是

$$Q(-s/r;A,\boldsymbol{H}^*) = \sigma_0^{-1}(Q(\infty;A,\boldsymbol{H}^*)). \qquad (9.25)$$

容易证明这邻域与 σ_0 的取法无关(为什么).从定义可清楚看出当 $\tau_0\in\boldsymbol{H}$ 时邻域的概念与通常复平面上邻域概念是一样的,但当 τ_0 是抛物点时,就不同了.

有了 $\boldsymbol{H}^*$ 中的点的邻域的概念就可引进 $\boldsymbol{H}^*$ 中的点列的极限点的概念.设 $\tau_n(n=1,2,\cdots)$是 $\boldsymbol{H}^*$ 中的一点列,$\tau_0\in\boldsymbol{H}^*$.(i) 点 $\tau_0\in\boldsymbol{H}$,即 τ_0 不是抛物点,我们说 τ_0 是点列$\{\tau_n\}$在 $\boldsymbol{H}^*$ 中的极限点,如果对任意小的 $\delta>0$,在 τ_0 的 δ-邻域 $Q(\tau_0;\delta,\boldsymbol{H}^*)$内必有点列 τ_n 中的无穷多个点;(ii) 点 τ_0 是抛物点,我们说 τ_0 是点列$\{\tau_n\}$在 $\boldsymbol{H}^*$ 中的极限点,如果对任意大的$A>0$,在 τ_0 的 A-邻域 $Q(\tau_0;A,\boldsymbol{H}^*)$内必有点列$\{\tau_n\}$中的无穷多个点.

进而,可以引进 $\boldsymbol{H}^*$ 中的点列收敛的概念.利用上段中的符号.(i) $\tau_0\in\boldsymbol{H}$.我们说点列$\{\tau_n\}$在 $\boldsymbol{H}^*$ 中收敛到 τ_0,如果对任意小的 $\delta>0$,必有 $N>0$ 使得 $n\geqslant N$ 时,点 τ_n 一定属于 τ_0 的 δ-邻域 $Q(\tau_0;\delta,\boldsymbol{H}^*)$.这和通常的概念是一样的.(ii) τ_0 是抛物点.我们说点列$\{\tau_n\}$在 $\boldsymbol{H}^*$ 中收敛到 τ_0,如果对任意大的 $A>0$,必有 $N>0$,使 $n\geqslant N$ 时,点 τ_n 一定属于 τ_0 的 A-邻域 $Q(\tau_0;A,\boldsymbol{H}^*)$.这和通常定义是不

同的，这一点一定要注意. 容易看出(为什么)：

$$\tau_n \in Q(\tau_0; A, \boldsymbol{H}^*)$$

就是

$$\operatorname{Im}\sigma_0(\tau_n) > A,$$

其中 $\sigma_0 \in \Gamma$ 同式(9.25)，当 $\tau_0 = \infty$ 时，$\sigma_0 = I$.

最后，我们来讨论这样一个问题：对取定的 Γ 的一个基本区域，比如说是 $\mathscr{F}^*$，那么，对一个点 $\tau_0 \in \boldsymbol{H}^*$，它的一个邻域有多少是属于 $\mathscr{F}^*$ 的，即和 $\mathscr{F}^*$ 的交是怎样的？当点 $\tau_0 \notin \overline{\mathscr{F}}$ 时，τ_0 的适当小的邻域(即 δ 适当小或 A 适当大)必和 $\overline{\mathscr{F}}$ 不相交；当 $\tau_0 \in \mathscr{F}$ 时 τ_0 的适当小的邻域必完全属于 $\mathscr{F}$，这两种情形都是清楚的. 剩下的要考虑 τ_0 属于 $\mathscr{F}^*$ 的边界或为 ∞，这时 τ_0 一定是不动点或在 $\overline{\mathscr{F}} \backslash \mathscr{F}^*$ 上有等价点(定理 9.3 写出了所有这些可能). 这样一个点可以属于不同的基本区域，例如：i 属于 $\mathscr{F}^*$ 及 G_1^*—G_6^*；ρ 属于 $\mathscr{F}^*$ 及 G_3^*—G_6^*；∞ 属于 $\mathscr{F}^*$ 及 G_j^* $(j \neq 4)$；0 属于 $S(\mathscr{F}^*)$ 及 G_4^*；$-1/2+\mathrm{i}t$ $(t \geqslant \sqrt{3}/2)$ 属于 $\mathscr{F}^*$ 及 G_3^*—G_6^*. 但**这样一个点的一个邻域有多少部分属于一个基本区域，应该与基本区域的选取是无关的**. 观察以上的例子，我们可以合理地引进以下的定义(这里取 $\mathscr{F}^*$ 来讨论，其他类似，留给读者)，这实质上是反映了基本区域中的等价点是同一个点这一事实.

(i) 对点 ∞ 来说，它在 $\overline{\mathscr{F}}$ 上没有等价点，所以它的一个邻域属于 $\mathscr{F}^*$ 的部分是

$$Q(\infty; A, \boldsymbol{H}^*) \cap \mathscr{F}^*;$$

(ii) 对点 i 来说，它在 $\overline{\mathscr{F}}$ 上没有等价点，所以它的一个邻域属于 $\mathscr{F}^*$ 的部分是

$$Q(\mathrm{i}; \delta, \boldsymbol{H}^*) \cap \mathscr{F}^*,$$

近似一个半圆；

(iii) 对点 $\rho = \rho^-$ 来说，它在 $\overline{\mathscr{F}}$ 上有等价点 $1+\rho = \rho^+$，所以它的一个邻域属于 $\mathscr{F}^*$ 的部分是

$$(Q(\rho^-; \delta, \boldsymbol{H}^*) \cup Q(\rho^+; \delta, \boldsymbol{H}^*)) \cap \mathscr{F}^*,$$

合起来近似 1/3 个圆；

(iv) 对点 $-1/2+\mathrm{i}t$ $(\sqrt{3}/2 < t < \infty)$ 来说，它在 $\overline{\mathscr{F}}$ 上有等价点

$1/2+\mathrm{i}t$,所以它的一个邻域属于 $\mathscr{F}^*$ 的部分是

$$(Q(-1/2+\mathrm{i}t;\delta,\boldsymbol{H}^*)\cup Q(1/2+\mathrm{i}t;\delta,\boldsymbol{H}^*))\cap\mathscr{F}^*,$$

当 δ 充分小时,合起来是一个圆,即整个邻域属于 $\mathscr{F}^*$,所以是 $\mathscr{F}^*$ 的内点. 这在基本区域 G_5^* 中可以清楚看出.

§10 平面的辛测度

本节要在完全复平面 $\boldsymbol{C}^*$ 上引进某种角度、长度和面积的度量,使得它们在辛变换下是不变的. 两曲线在其交点处的夹角的定义和通常的定义是一样的,即是在该点处这两曲线的切线的夹角(按规定方向). 由复分析知,辛变换是保角的,所以这样定义的夹角在辛变换下不变. 容易证明(留给读者):两测地线的交点若在实轴上或为∞,则交角为零,且反过来也对.

下面来考察长度元和面积元. 由微积分学知道,通常的长度元是

$$\mathrm{d}s=((\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2)^{1/2},$$

面积元是

$$\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

设 $\alpha=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{R})$,$z=x+\mathrm{i}y$. 我们来考察在辛变换

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}$$

下,通常的长度元 $\mathrm{d}s$ 和面积元 $\mathrm{d}\mu$ 的变化. 设 $z'=x'+\mathrm{i}y'$,及

$$\frac{az+b}{cz+d}=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y).$$

因而有

$$y'=\frac{y}{|cz+d|^2},\tag{10.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{(cz+d)^2}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y},$$

及

$$\mathrm{d}x'=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}y'=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

利用以上各式，经变换后，通常的长度元的平方为

$$(\mathrm{d}x')^2+(\mathrm{d}y')^2=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}(\mathrm{d}x)^2$$

$$+\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}(\mathrm{d}y)^2$$

$$=\left|\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}z}\right|^2\{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2\}$$

$$=\frac{1}{|cz+d|^4}\{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2\}.$$

由此及式(10.1)得

$$\frac{(\mathrm{d}x')^2+(\mathrm{d}y')^2}{(y')^2}=\frac{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}{y^2}. \tag{10.2}$$

由微积分学知，变换后的面积元

$$\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}z}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|cz+d|^4}.$$

由此及式(10.1)得

$$\frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{(y')^2}=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}. \tag{10.3}$$

由以上讨论知，我们可以引进以下的测度，它们在辛变换下是不变的.

定义 10.1　完全复平面 C^* 上的**辛长度元**是

$$\frac{((\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2)^{1/2}}{|y|};$$

辛面积元是

$$\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}.$$

曲线 $\mathscr{L}$ 的**辛长度**是

$$\int_{\mathscr{L}}\frac{((\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2)^{1/2}}{|y|};$$

区域 $\mathscr{D}$ 的**辛面积**是

$$\int_{\mathscr{D}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}.$$

这样定义的曲线的辛长度和区域的辛面积，在辛变换下是不变的. 下面来讨论在完全上半平面 $\overline{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{H}\cup\{\infty\}\cup\{\boldsymbol{R}\}$ 中的测地三角形的辛面积和测地线的辛长度.

定理 10.1　设点 $A,B,C\in\overline{\boldsymbol{H}}$，不在同一测地线上. 那么，测地三角形 ABC 的辛面积等于

$$\pi-(\angle A+\angle B+\angle C), \tag{10.4}$$

其中 $\angle A,\angle B,\angle C$ 是测地三角形 ABC 的三内角. 特别的，模三角形的辛面积等于 $\pi/3$.

证　以下 $\triangle ABC$ 既表示测地三角形也表示它的辛面积. 首先来指出：任一测地三角形的辛面积（以下简称面积）必可化为计算至少有两个内角为零（即这两个顶点 $\in\{\infty\}\cup\{\boldsymbol{R}\}$）的测地三角形的面积. 为此，我们来讨论图 10.1 所示的情形（其他可能的情形请读者自己讨论）：$\angle B$ 和 $\angle C$ 都不等于零. 这时点 B 和 C 一定不在实轴上，也不是无穷远点（为什么）. 设 D,E,F 分别是测地线 AB,BC,CA 和实轴的交点. 这样就有

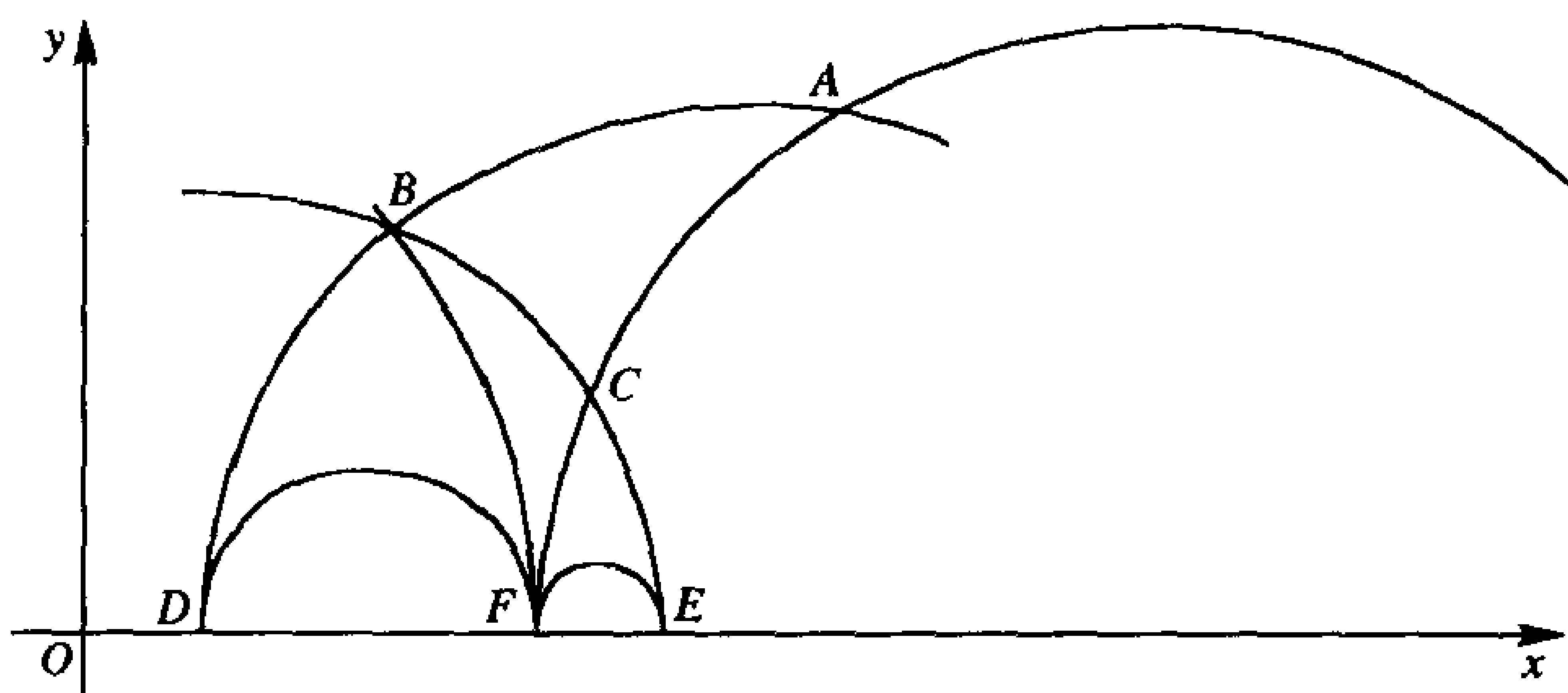


图　10.1

$$\triangle ABC=\triangle ABF-\triangle CBF, \tag{10.5}$$

进而有

$$\triangle ABF=\triangle ADF-\triangle BDF, \tag{10.6}$$

$$\triangle CBF=\triangle EBF-\triangle ECF. \tag{10.7}$$

显见，式(10.6)和(10.7)右边的四个测地三角形均有两个内角为零.

这就证明了所要的结论. 其次,有两内角为零的测地三角形其相应的顶点必属于$\{\infty\}\cup\{\boldsymbol{R}\}$,所以一定可通过辛变换把其变为一个顶点在实轴上,一个顶点为∞的测地三角形(为什么). 当然,这两测地三角形的辛面积和相应的内角均相等. 因此,我们只要来计算如图10.2所示的顶点为H,G,∞的测地三角形. 设点G,H的坐标分别为$(g,0),(h,l)$,过H,G的测地线的圆心K的坐标为$(k,0)$,半径为r,以及H点处的内角为α. 这样就有

$$
\begin{aligned}
\triangle HG\infty &= \int_h^g\int_{(r^2-(x-k)^2)^{1/2}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} = \int_h^g\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-(x-k)^2}} \\
&= \arcsin\frac{x-k}{r}\bigg|_h^g = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{h-k}{r} \\
&= \angle HKG = \pi - \alpha = \pi - \angle H.
\end{aligned}
$$

由此推出

$$
\begin{aligned}
\triangle ADF &= \pi - \angle A, \\
\triangle BDF &= \pi - \angle DBF = \pi - (\pi - \angle B - \angle CBF) \\
&= \angle B + \angle CBF, \\
\triangle EBF &= \pi - \angle EBF = \pi - \angle CBF, \\
\triangle ECF &= \pi - \angle ECF = \pi - \angle C.
\end{aligned}
$$

把以上结果代入式(10.6)和(10.7),由式(10.5)即得式(10.4). 后一结论的证明留给读者.

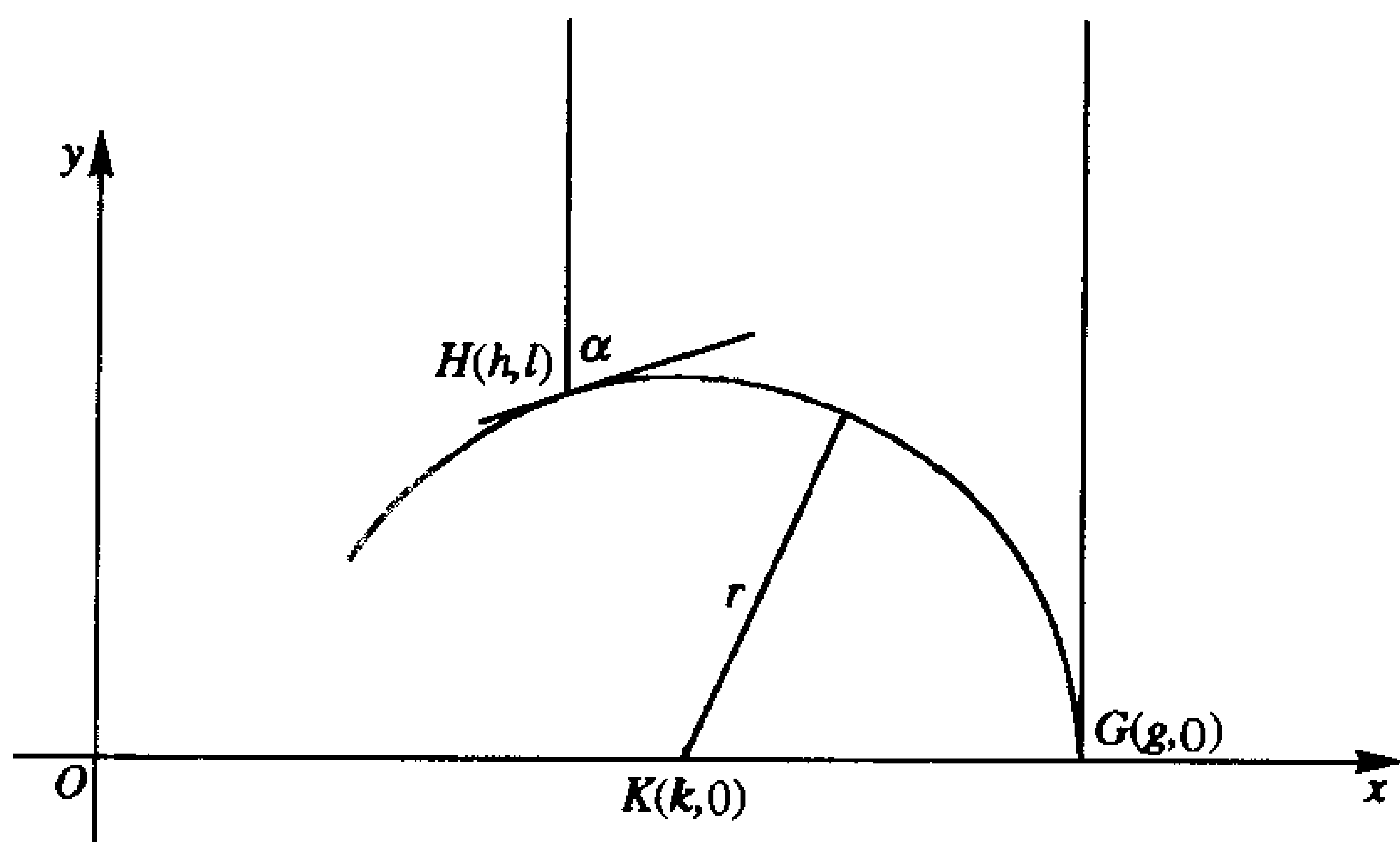


图　10.2

下面来讨论两点间的测地线的辛长度.

定理 10.2　设点 $A_1,A_2\in \boldsymbol{H}$. 那么，

(i) 当点 A_1,A_2 的横坐标相同时，设 y_1,y_2 是它们的纵坐标，且 $y_1<y_2$. 这时以 A_1,A_2 为端点的测地线的辛长度是

$$\log(y_2/y_1);$$

(ii) 当点 A_1,A_2 的横坐标不相同时，设通过 A_1,A_2 的测地线是以点 $B(b,0)$ 为圆心，半径为 r 的半圆. 再设 θ_1,θ_2 分别是直线 BA_1, BA_2 和正向实轴的夹角，且 $\theta_1<\theta_2$. 这时以 A_1,A_2 为端点的测地线的辛长度是

$$\log(\tan(\theta_2/2)/\tan(\theta_1/2));$$

(iii) 无论以上何种情形，以 A_1,A_2 为端点的任一光滑曲线的辛长度都不小于以 A_1,A_2 为端点的测地线的辛长度.

证　我们来证(ii)和(iii)，(i)是显然的留给读者. 由图 10.3 知，从 A_1 到 A_2 的测地线有参数方程

$$x=b+r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2,$$

因此，它的辛长度等于(利用 $\mathrm{d}x=-r\sin\theta\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}y=r\cos\theta\mathrm{d}\theta$)

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{((-r\sin\theta\mathrm{d}\theta)^2+(r\cos\theta\mathrm{d}\theta)^2)^{1/2}}{r\sin\theta}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}=\log\frac{\tan\theta_2/2}{\tan\theta_1/2}.$$

这就证明了(ii). 设以 A_1,A_2 为端点的光滑曲线 $\mathscr{L}$ 有以下的参数方程：

$$x=b+f(\theta)\cos\theta,\quad y=f(\theta)\sin\theta,\quad \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2,$$

其中 $f(\theta)$ 是点 B 到该曲线上的点 P 的距离，θ 是 BP 和实轴的交角(见图 10.3，我们就讨论图示的情形，曲线 $\mathscr{L}$ 的其他情形可归结为此). 由于曲线是光滑的，所以 $f(\theta)$ 是连续可微的. 因此，曲线 $\mathscr{L}$ 的辛长度等于

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\{(f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta)^2+(f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta)^2\}^{1/2}}{f(\theta)\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left\{1+\left(\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\right)^2\right\}^{1/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}\geqslant\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}=\log\frac{\tan\theta_2/2}{\tan\theta_1/2}.$$

这就证明了(iii)①.

① 当 $\mathscr{L}$ 是测地线时，$f(\theta)\equiv r$，所以等号成立，这就是(ii)的证明.

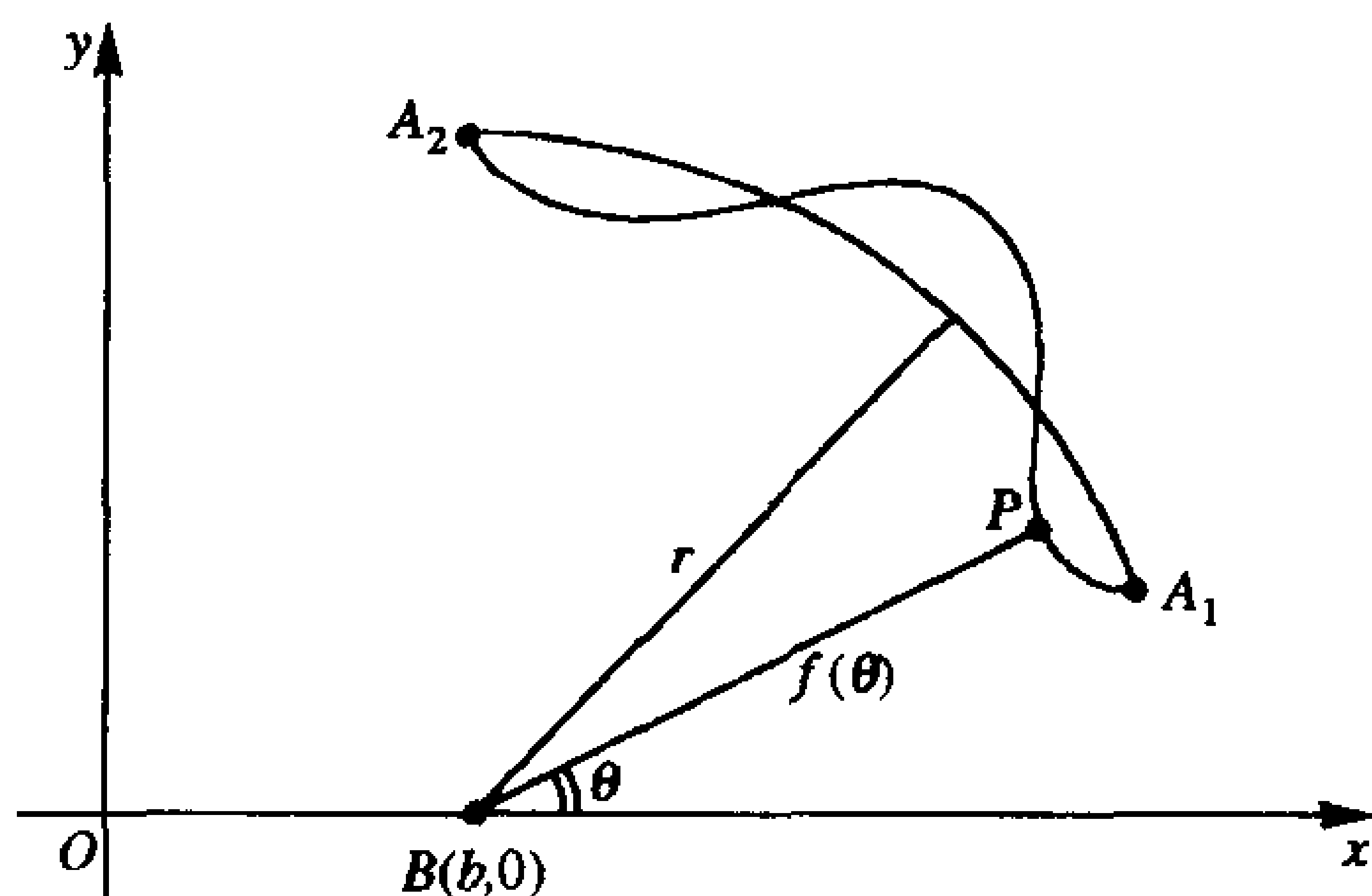


图　10.3

问　题

1. 求出 Γ 中的所有元素 α，使得(i) $\alpha S=S\alpha$；(ii) $\alpha(ST)=(ST)\alpha$.

2. 求出以下各点在基本区域 $\mathscr{F}^*$ 中的 Γ 等价点：

(i) $(8+6\mathrm{i})/(3+2\mathrm{i})$；　(ii) $(10\mathrm{i}+11)/(6\mathrm{i}+12)$.

3. 给出一个求在基本区域 $\mathscr{F}^*$ 中的 Γ 等价点的方法.

4. 本题是讨论实二次型 $Q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$，$a,b,c\in\boldsymbol{R}$. $D=b^2-4ac$ 称为二次型 $Q(x,y)$ 的判别式. (i) 二次型 $F(x',y')=a'x'^2+b'x'y'+c'y'^2$ 称为是和二次型 $Q(x,y)$ 相似的，如果存在 $\alpha\in\Gamma$，使得在变换

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$$

下，有 $Q(x,y)=F(x',y')$. 证明：这种相似关系是等价关系，且相似的二次型有相同的判别式. 这样，全体实二次型可按这样的等价关系分为两两不相交的等价类；(ii) 实二次型 $Q(x,y)$ 称为是正定的，如果 $a>0$，$D<0$. 记 $az^2+bz+c=0$ 的虚部为正的根为 τ，我们称 τ 是正定实二次型 $Q(x,y)$ 的代表. 证明：对固定的 $D<0$，全体判别式为 D 的正定实二次型与上半复平面 $\mathrm{Im}z>0$ 的点之间是一一对应的，以及两个判别式相同的正定实二次型是相似的充要条件是它们的代表是 Γ 等价的；(iii) 我们称一个正定实二次型是约化的，如果它的

代表 τ 属于 Γ 的基本区域 $\mathscr{F}^*$. 证明：两个约化型是相似的充要条件是它们是恒等的，以及在每个等价类中恰好包含一个约化型. (iv) 证明：$Q(x,y)$是约化型的充要条件是$-a<b\leqslant a<c$ 或 $0\leqslant b\leqslant a=c$；(v) 假定 $a,b,c\in \boldsymbol{Z}$. 证明：对给定的判别式 $D<0$，以 D 为判别式的全体正定二次型仅有有限个等价类，其个数记作 $h(D)$，称为类数；(vi) 求出判别式为 $D(-20\leqslant D\leqslant -1)$的所有系数为整数的约化正定二次型，及类数 $h(D)$.

5. 求出若干组由两个元素组成的 Γ 的生成元.

6. (i) 证明：双曲变换的不动点一定是两个共轭的实二次无理数，即 $r\pm s\sqrt{D}$，$r,s\in \boldsymbol{Q}$，$D\in \boldsymbol{N}$，且是非平方数；(ii) 所有以 $r\pm s\sqrt{D}$为不动点的全体模变换构成一个无限循环群.

7. (i) 讨论定理 10.1 除图 10.1 以外的其他可能的情形；(ii) 证明定理 10.1 中的结论：模三角形的辛面积等于 $\pi/3$；(iii) 证明定理 10.2 中的结论(i).

8. 计算由曲线 $x^2+y^2=1, x^2+y^2=2, x=1/2, x=-1/2$ 在上半平面所围成的区域的辛面积.

9. 设 z_1,z_2,z_3,z_4 是复平面上的四点，记

$$r(z_1,z_2;z_3,z_4)=\frac{(z_3-z_1)/(z_2-z_3)}{(z_4-z_1)/(z_2-z_4)},$$

并称它为四点 z_1,z_2,z_3,z_4 的交比. 证明：(i) 在复系数的分式线性变换

$$z'=\frac{az+b}{cz+d},\quad a,b,c,d\in \boldsymbol{C}$$

下，交比不变；(ii) 交比为实数的充要条件是这四点在同一圆周或直线(半径为无穷大之圆周)上；(iii) 设 A_1,A_2 为上半平面上的两点，过这两点的测地线交实轴于 A_3,A_4 两点，且 A_1,A_2,A_3,A_4 按逆时针方向排列. 证明：过点 A_1,A_2 的测地线的长度等于

$$\log|r(A_4,A_3;A_2,A_1)|;$$

(iv) 如何把(iii)中的结论推广到 A_1,A_2 有相同的横坐标的情形？

第四章　完全模群的同余子群

了解得较为清楚的一类重要模群是所谓同余子群，这也是我们以后要用到的.本章就是讨论它的性质.在§11将讨论同余子群的概念，基本性质，及其陪集分解.§12和§13讨论一般的指数有限的模(变换)群的不动点和它的基本区域及生成元.对模(变换)群来说，它的不动点、基本区域和生成元要比完全模(变换)群复杂得多，所以，在§14我们给出了几个简单的具体例子，这些例子可以分散在以上各节讲.

§11　同余子群及其陪集分解

设 $\boldsymbol{Z}_n$ 是模 n 的剩余类环，$\boldsymbol{Z}_n^*$ 是 $\boldsymbol{Z}_n$ 中的可逆元素组成的乘法群，以及模 n 的剩余类环 $\boldsymbol{Z}_n$ 上的特殊线性群

$$\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z}_n)=\left\{\sigma=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix},\ a,b,c,d\in\boldsymbol{Z}_n,\ ad-bc=1\right\}. \tag{11.1}$$

这样，由 $\boldsymbol{Z}$ 到 $\boldsymbol{Z}_n$ 的自然同态映射

$$\psi:\ x\mapsto x \bmod n \tag{11.2}$$

就诱导出 $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z})$到 $\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z}_n)$(或一般的，$\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Z})$到 $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Z}_n)$)的自然同态映射

$$\psi:\ \sigma\mapsto\sigma \bmod n, \tag{11.3}$$

这里

$$\sigma=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in\Gamma,\quad \text{和}\quad \psi(\sigma)=\sigma \bmod n=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z}_n), \tag{11.4}$$

后者中的 a,b,c 及 $d\in\boldsymbol{Z}_n$，即表示 $a \bmod n$，$b \bmod n$，$c \bmod n$，及 $d \bmod n$，且 $\sigma \bmod n\in\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z}_n)$，也经常写为 $\sigma\in\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z}_n)$，即略去

mod n 不写. 只要模 n 固定,两者是不会混淆的. 这样一来,通过考虑 $SL_2(\mathbf{Z}_n)$中的子群在这自然同态映射下的原像,就可得到 Γ 的各种形式的子群.

设 $\boldsymbol{S}_n^{\times}$ 是乘法群 $\mathbf{Z}_n^*$ 的子群,l 是正整数且 $l|n$,以及

$$\boldsymbol{S}_n^{+}(l)=\{a\in \mathbf{Z}_n:\ l|a\}. \tag{11.5}$$

容易看出,$\boldsymbol{S}_n^{+}(l)$是 $\mathbf{Z}_n$ 的加法子群,以及 $\psi^{-1}(\boldsymbol{S}_n^{+}(l))=l\mathbf{Z}$. 现设 n,r,s 是正整数,满足条件

$$r|n,\quad s|n,\quad 及\quad n|rs. \tag{11.6}$$

(注:这里要求满足条件:$r|n,s|n$,是为使讨论简化,且也满足我们以后的需要.)那么,

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{S}_n^{\times};r,s)=\left\{\sigma=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z}_n):\ a\in \boldsymbol{S}_n^{\times},\right.$$

$$\left. c\in \boldsymbol{S}_n^{+}(r),b\in \boldsymbol{S}_n^{+}(s)\right\} \tag{11.7}$$

是 $SL_2(\mathbf{Z}_n)$的子群(为什么). 这样,它的原像

$$\Gamma(\boldsymbol{S}_n^{\times};r,s)=\psi^{-1}(\mathrm{H}(S_n^{\times},r,s)) \tag{11.8}$$

就是 Γ 的子群. 特别的,当 $\boldsymbol{S}_n^{\times}$ 是 $\mathbf{Z}_n^*$ 的显然子群$\{1\}$时,记

$$\Gamma_1(n;r,s)=\psi^{-1}(\mathrm{H}(\{1\},r,s)); \tag{11.9}$$

当 $\boldsymbol{S}_n^{\times}=\mathbf{Z}_n^*$ 时,记

$$\Gamma_0(n;r,s)=\psi^{-1}(\mathrm{H}(\mathbf{Z}_n^*,r,s)). \tag{11.10}$$

容易验证(留给读者)

$$\Gamma_0(n;r,s)=\left\{\sigma=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in \Gamma:\ (a,n)=1,\right.$$

$$\left. c\equiv 0(\bmod r),b\equiv 0(\bmod s)\right\}, \tag{11.11}$$

$$\Gamma_1(n;r,s)=\left\{\sigma=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in \Gamma_0(n;r,s):\ a\equiv 1(\bmod n)\right\}. \tag{11.12}$$

由条件(11.6)知它们的元素均满足

$$ad \equiv 1(\bmod n). \tag{11.13}$$

特别的，我们记

$$\Gamma_0(n) = \Gamma_0(n;n,1),\ \Gamma^0(n) = \Gamma_0(n;1,n),\ \Gamma_0^0(n) = \Gamma_0(n;n,n), \tag{11.14}$$

$$\Gamma_1(n) = \Gamma_1(n;n,1),\ \Gamma^1(n) = \Gamma_1(n;1,n),\ \Gamma(n) = \Gamma_1(n;n,n). \tag{11.15}$$

定义 11.1　我们称 $\Gamma(n)$是 Γ 的 n **级主同余子群**，$\Gamma_0(n)$是 Γ 的 n **级 Hecke 同余子群**. 设 Γ'是 Γ 的子群. 若有正整数 n 使得 $\Gamma(n)\subseteq\Gamma'$，则称 Γ'是 Γ 的 n **级同余子群或同余子群**. 若 $\Gamma(l)\subseteq\Gamma'$，而对任意的 $n<l$，$\Gamma(n)\not\subseteq\Gamma'$，则称 Γ'是 Γ 的 l **级本原同余子群**，l 称为是**同余子群 Γ' 的本原级**或**导子**.

容易证明(留给读者)，$\Gamma(S_n^{\times};r,s)$一定是 Γ 的同余子群，且是 $[r,s]$级本原同余子群. 因此，由式(11.14)，(11.15)给出的 Γ 的子群都是 n 级本原同余子群.

$\Gamma=\Gamma(1)=\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$到 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_n)$的自然同态映射 ψ 有以下重要性质：

定理 11.1　$\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$到 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_n)$的自然同态映射 ψ 是一个满射，即对每个

$$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_n)$$

必有

$$\alpha = \begin{bmatrix} u & v \\ s & t \end{bmatrix} \in \Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}),$$

使得 $\psi(\alpha)=\sigma$，即

$$u\in a \bmod n,\ v\in b \bmod n,\ s\in c \bmod n,\ 及\ t\in d \bmod n.$$

证　不妨假定 $a\neq 0$(为什么). 由条件知整数 a,b,c,d 满足 $ad-bc\equiv 1(\bmod n)$，即有 $ad-bc+ne=1$，e 为某一整数. 因 $a\neq 0$，可取

$$k = \prod_{p\mid a,\, p\nmid b} p,\quad p\ 为素数.$$

由此及$(a,b,n)=1$ 推出

$$(a,b+kn) = 1. \tag{11.16}$$

因而必有整数 l,m 满足 $al-(b+kn)m=e+kc$. 这样,我们取 $u=a$, $v=b+kn$, $s=c+mn$ 及 $t=d+ln$ 就满足要求.

定理 11.2　(i) $\Gamma(n)$是 Γ 的正规子群;(ii) 在条件(11.6)下, $\Gamma_1(n;r,s)$ 是 $\Gamma_0(n;r,s)$的正规子群.

证　对 $\alpha,\alpha'\in GL_2(\mathbf{Z})$,符号

$$\alpha\equiv\alpha'\pmod n \tag{11.17}$$

表示 $\psi(\alpha)=\psi(\alpha')$. 这样,对任意的 $\alpha\in\Gamma(n)$及 $\sigma\in\Gamma$ 有

$$\sigma\alpha\sigma^{-1}\equiv\sigma\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\sigma^{-1}\equiv\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\pmod n,$$

所以,$\sigma\alpha\sigma^{-1}\in\Gamma(n)$,这就证明了(i). 下面来证(ii). 设

$$\alpha=\begin{bmatrix}a&sb\\rc&d\end{bmatrix}\in\Gamma_1(n;r,s),\quad \sigma=\begin{bmatrix}u&sv\\rx&y\end{bmatrix}\in\Gamma_0(n;r,s),$$

由此及条件(11.6)就推出:

$$\sigma\alpha\sigma^{-1}\equiv\begin{bmatrix}u&sv\\rx&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&sb\\rc&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y&-sv\\-rx&u\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}1&s*\\r*&1\end{bmatrix}\pmod n,$$

因此 $\sigma\alpha\sigma^{-1}\in\Gamma_1(n;r,s)$,这就证明了(ii).

下面来讨论几个基本同余子群的指数和陪集分解.

定理 11.3　我们有

(i)
$$[\Gamma_1(n):\Gamma(n)]=n, \tag{11.18}$$

其左、右陪集分解是

$$\Gamma_1(n)=\bigcup_{b \bmod n}\begin{bmatrix}1&b\\0&1\end{bmatrix}\Gamma(n),\quad \Gamma_1(n)=\bigcup_{b \bmod n}\Gamma(n)\begin{bmatrix}1&b\\0&1\end{bmatrix}; \tag{11.19}$$

(ii)
$$[\Gamma_0(n):\Gamma_1(n)]=\varphi(n), \tag{11.20}$$

其左、右陪集分解是

$$\Gamma_0(n)=\bigcup_{d \bmod n,(d,n)=1}\rho(d)\Gamma_1(n),\quad \Gamma_0(n)=\bigcup_{d \bmod n,(d,n)=1}\Gamma_1(n)\rho(d), \tag{11.21}$$

其中 $\rho(d)$是任意取定的一个矩阵,满足

$$\rho(d)\in\Gamma_0(n),\quad \rho(d)\equiv\begin{bmatrix}d^{-1}&*\\0&d\end{bmatrix}\pmod n, \tag{11.22}$$

这里 $dd^{-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\, n)$. 特别地，可取

$$\rho(d)\equiv\begin{bmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}(\mathrm{mod}\, n)\quad 或\quad \rho(d)=\begin{bmatrix} d^{-1} & \pm 1 \\ \pm(dd^{-1}-1) & d \end{bmatrix}; \tag{11.23}$$

(iii)
$$[\Gamma:\Gamma_0(n)]=n\prod_{p\mid n}\left(1+\frac{1}{p}\right), \tag{11.24}$$

其左、右陪集分解是

$$\Gamma=\bigcup_{l\mid n}\ \bigcup_{c\,\mathrm{mod}\, n/l,\,(c,l)=1}^{*}\begin{bmatrix} l & c^{-1} \\ -c & (1-cc^{-1})/l \end{bmatrix}\Gamma_0(n), \tag{11.25}$$

$$\Gamma=\bigcup_{l\mid n}\ \bigcup_{c\,\mathrm{mod}\, n/l,\,(c,l)=1}^{*}\Gamma_0(n)\begin{bmatrix} (1-cc^{-1})/l & -c^{-1} \\ c & l \end{bmatrix}, \tag{11.26}$$

其中对 c 求并的条件 * 表示：c 是任意取定的一组满足以下条件的全部整数，

$$c\ 对模\ n/l\ 两两不同余，\quad 且(c,l)=1. \tag{11.27}$$

要注意的是 c 不是在模 n/l 的任意取定的一组完全剩余系中取值.

(iv) 此外，我们有

$$[\Gamma:\Gamma(n)]=n^3\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right), \tag{11.28}$$

$$[\Gamma_0^0(n):\Gamma(n)]=\varphi(n), \tag{11.29}$$

及

$$[\Gamma_0(n):\Gamma_0^0(n)]=[\Gamma^0(n):\Gamma_0^0(n)]=n. \tag{11.30}$$

证　设

$$\alpha_j=\begin{bmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{bmatrix},\quad j=1,2.$$

我们先来证(i). 当 $\alpha_1,\alpha_2\in\Gamma_1(n)$时，它们属于 $\Gamma_1(n)$关于 $\Gamma(n)$的同一个右陪集的充要条件是 $\alpha_2\alpha_1^{-1}\in\Gamma(n)$，由于

$$\alpha_2\alpha_1^{-1}\equiv\begin{bmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} 1 & b_2-b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(\mathrm{mod}\, n),$$

所以充要条件就是

$$b_1\equiv b_2(\mathrm{mod}\, n),$$

这就证明了式(11.18)和式(11.19)中的右陪集分解式成立. 进而推

出左陪集分解式也成立(为什么). 其次来证(ii). 当 $\alpha_1,\alpha_2\in\Gamma_0(n)$时,

$$\alpha_2\alpha_1^{-1}\equiv\begin{bmatrix}a_1 & b_2\\0 & d_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1 & -b_1\\0 & a_1\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}d_1a_2 & a_1b_2-a_2b_1\\0 & a_1d_2\end{bmatrix}\pmod n,$$

注意到这时有 $a_1d_1\equiv a_2d_2\equiv 1\pmod n$, 所以 $\alpha_2\alpha_1^{-1}\in\Gamma_1(n)$, 即 α_1,α_2 属于 $\Gamma_1(n)$的同一个右陪集的充要条件是

$$d_1\equiv d_2\pmod n.$$

这就证明了式(11.20)及式(11.21)中的右陪集分解式也成立. 由定理 11.2(ii)知 $\Gamma_1(n)$是 $\Gamma_0(n)$的正规子群,所以左陪集分解式也成立(为什么). 现在来证(iii). 当 $\alpha_1,\alpha_2\in\Gamma$ 时,它们属于 $\Gamma_0(n)$的同一个右陪集的充要条件是:

$$c_1d_2-c_2d_1\equiv 0\pmod n.$$

由此及$(c_1,d_1)=(c_2,d_2)=1$,推出必有

$$(d_1,n)=(d_2,n).$$

设$(d_1,n)=l$. 容易证明(留给读者): 必有整数 s,t 满足

$$sb_1+td_1=l,\quad (s,t)=1,\quad n\mid s.$$

因此,必有

$$\sigma=\begin{bmatrix}u & v\\s & t\end{bmatrix}\in\Gamma_0(n),$$

使得

$$\sigma\alpha_1=\begin{bmatrix}* & *\\ * & l\end{bmatrix}\in\Gamma,\quad l\mid n.$$

这表明 Γ 关于 $\Gamma_0(n)$的每个右陪集代表元素均可取为如上的形式. 容易验证(留给读者):

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & l\end{bmatrix}\in\Gamma,\ l\mid n,\quad 和\quad\begin{bmatrix}a' & 'b\\c' & l'\end{bmatrix}\in\Gamma,\quad l'\mid n$$

属于同一个 $\Gamma_0(n)$的右陪集的充要条件是:

$$l'=l,\quad c'\equiv c\pmod{n/l}.\qquad(11.31)$$

综合以上讨论就推出: 右陪集分解式(11.26)成立,进而(为什么)左陪集分解式(11.25)也成立,以及$[\Gamma:\Gamma_0(n)]$等于满足: $l\mid n$ 及条件(11.27)的全部数对$\{l,c\}$的个数. 先来求对固定的 $l(l\mid n)$满足条件(11.27) 的 c 的个数. 由式(11.16)(取 $x,n/l,l$ 代替 a,b,n)知,在剩

余类 $x \bmod n/l$ 中有整数 c 和 l 互素的充要条件是

$$(x,n/l,l) = (x,(n/l,l)) = 1. \tag{11.32}$$

所以,能取到这样的 c 的模 n/l 的剩余类个数是

$$\varphi((n/l,l))\frac{n/l}{(n/l,l)} = f(l,n), \quad l\,|\,n. \tag{11.33}$$

因而推出

$$[\Gamma : \Gamma_0(n)] = \sum_{l|n} f(l,n).$$

容易证明(留给读者):上式右边是 n 的积性函数,以及对素数 p 有

$$\begin{aligned}[\Gamma : \Gamma_0(p^r)] &= p^r + p^{r-1}\left(1-\frac{1}{p}\right) + \cdots + p\left(1-\frac{1}{p}\right) + 1 \\ &= p^r\left(1+\frac{1}{p}\right).\end{aligned}$$

这就证明了式(11.24).由式(11.18),(11.20)及(11.24)就推出式(11.28).式(11.29)和(11.30)的证明留给读者.证毕.

应该指出:由定理 11.1 知,$[\Gamma : \Gamma(n)]$ 就是群 $SL_2(\mathbf{Z}_n)$的阶——它的元素个数(为什么),也就是四个变数的同余方程

$$ad - bc \equiv 1 \pmod n$$

的解$\{a,b,c,d\}$的个数.熟知,这解数是模 n 的积性函数.由此就能直接证明式(11.28),进而由式(11.18)及(11.20)推出式(11.24).这些讨论留给读者.这个方法的缺点是不能直接得到陪集分解式(11.25)和(11.26).

定理 11.4　设 Γ'是同余子群,$\Gamma(m)\subseteq\Gamma'$及 $\alpha\in GL_2^+(\mathbf{Q})$.那么,

$$\Gamma'' = (\alpha\Gamma'\alpha^{-1}) \cap \Gamma$$

也是同余子群.特别地,当 $\alpha\in\Gamma$ 时,Γ'的共轭子群 $\alpha\Gamma'\alpha^{-1}$是同余子群,且和 Γ'有相同的本原级.

证　由于必有有理数 s 使得 $s\alpha\in GL_2^+(\mathbf{Z})$,以及

$$\alpha\Gamma'\alpha^{-1} = (s\alpha)\Gamma'(s\alpha)^{-1},$$

所以,不妨假设 $\alpha\in M(n)$.注意到 $n\alpha^{-1}\in M(n)$,我们有

$$(n\alpha^{-1})\Gamma(mn)\alpha \equiv \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \pmod{mn},$$

因而有

$$\alpha^{-1}\Gamma(mn)\alpha \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \pmod{m}.$$

由此推出

$$\Gamma(mn) \subseteq \alpha\Gamma(m)\alpha^{-1}, \quad \alpha \in M(n). \tag{11.34}$$

这就证明了前一部分结论. 后半结论即是 $n=1$ 的情形,证明留给读者.

类似于式(11.34),容易证明(留给读者):

$$\Gamma(mn) \subseteq \alpha^{-1}\Gamma(m)\alpha, \quad \alpha \in M(n), \tag{11.35}$$

$$\Gamma(n^2m) \subseteq \alpha\Gamma(nm)\alpha^{-1}, \quad \alpha \in M(n), \tag{11.36}$$

$$\Gamma(n^2m) \subseteq \alpha^{-1}\Gamma(nm)\alpha, \quad \alpha \in M(n). \tag{11.37}$$

定理 11.4 是构造同余子群的有用方法. 下面举几个例子. 设 n 是正整数. 几个常用的矩阵记为

$$A_{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}, \quad B_{(n)} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W_{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ n & 0 \end{bmatrix}. \tag{11.38}$$

显然有,

$$SB_{(n)} = W_{(n)}, \quad nB_{(n)}^{-1} = A_{(n)}, \quad W_{(n)}^{-1} = -W_{(n)}, \tag{11.39}$$

$$A_{(n)}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}A_{(n)}^{-1} = B_{(n)}^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}B_{(n)} = \begin{bmatrix} a & b/n \\ nc & d \end{bmatrix}, \tag{11.40}$$

$$A_{(n)}^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}A_{(n)} = B_{(n)}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}B_{(n)}^{-1} = \begin{bmatrix} a & nb \\ c/n & d \end{bmatrix}, \tag{11.41}$$

$$W_{(n)}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}W_{(n)}^{-1} = W_{(n)}^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}W_{(n)} = \begin{bmatrix} d & -c/n \\ -nb & a \end{bmatrix}, \tag{11.42}$$

以及

$$W_{(n)}TW_{(n)}^{-1} = ST^nS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{bmatrix}. \tag{11.43}$$

由此,不难推出

$$\begin{aligned}(A_{(n)}\Gamma A_{(n)}^{-1}) \cap \Gamma &= (B_{(n)}^{-1}\Gamma B_{(n)}) \cap \Gamma = A_{(n)}\Gamma^0(n)A_{(n)}^{-1} \\ &= B_{(n)}^{-1}\Gamma^0(n)B_{(n)} = \Gamma_0(n),\end{aligned} \tag{11.44}$$

$$(A_{(n)}^{-1}\Gamma A_{(n)}) \cap \Gamma = (B_{(n)}\Gamma B_{(n)}^{-1}) \cap \Gamma = A_{(n)}^{-1}\Gamma_0(n)A_{(n)}$$
$$= B_{(n)}\Gamma_0(n)B_{(n)}^{-1} = \Gamma^0(n), \qquad (11.45)$$
$$(W_{(n)}\Gamma W_{(n)}^{-1}) \cap \Gamma = W_{(n)}\Gamma_0(n)W_{(n)}^{-1} = \Gamma^0(n). \qquad (11.46)$$

下面来举一个不同形式的同余子群的例子：

$$\Gamma' = \Gamma(n)(I \cup -I \cup S \cup -S) = \Gamma(n)\{S\}. \qquad (11.47)$$

当 $n=2$ 时，它称为 **Theta 群**，记为

$$\Gamma_\theta = \Gamma(2)(I \cup S). \qquad (11.48)$$

由于 $\Gamma(n)$是 Γ 的正规子群，所以对任一模群 Γ''，$\Gamma(n)\Gamma''$一定是一个同余子群(为什么)，当取 $\Gamma''=\{S\}$，即由 S 生成的子群时，就是式(11.47). 当 $n=2$ 时，$-I\in\Gamma(2)$，式(11.47)就变为式(11.48). 可以证明(留给读者)：

$$\Gamma = \Gamma_\theta(I \cup T \cup TS). \qquad (11.49)$$

最后，我们来证明关于同余子群的本原级(即导子)的一个结果.

定理 11.5 设 Γ'是同余子群，其本原级为 l. 以 k 表示满足以下条件的最小正整数 m：

$$\sigma T^m \sigma^{-1} \in \Gamma', \quad 对任意的\ \sigma \in \Gamma, \qquad (11.50)$$

那么，$l=k$.

证 易证 l 满足条件(11.50)，所以 $k\leqslant l$. 设 $l=qk+r$，$0\leqslant r<k$. 对任意的 $\sigma\in\Gamma$ 有

$$\sigma T^r \sigma^{-1} = (\sigma T^l \sigma^{-1})(\sigma T^k \sigma^{-1})^{-q} \in \Gamma'.$$

由此及 k 的最小性推出 $r=0$，$k\mid l$. 所以 $\Gamma(l)\subseteq\Gamma(k)$.

下面来证 $\Gamma(k)\subseteq\Gamma'$，由此及 l 是 Γ'的本原级就推出 $l=k$. 设

$$\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma(k).$$

我们的证明是构造性的. 具体地说，我们要利用条件(11.50)对 $m=k$ 成立，特别是 $T^k\in\Gamma'$，来构造若干个属于 Γ'的矩阵，它们依次右乘或左乘于 α，使得最后得到一个属于 Γ'的矩阵. 由此就推出 $\alpha\in\Gamma'$，即 $\Gamma(k)\subseteq\Gamma'$. 由 $(d,ck)=1$ 知，必有整数 g_1 使 $d_1=d+g_1ck$ 和 l 互素(为什么)，因而有

$$\alpha_1 = \alpha T^{g_1 k} = \begin{bmatrix} a & b+ag_1k \\ c & d+cg_1k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{bmatrix} \in \Gamma(k).$$

由 $k|b_1, k|l$ 及 $(d_1, l)=1$ 知，必有整数 g_2 使

$$b_1/k + d_1 g_2 \equiv 0 \pmod{l/k},$$

所以有

$$\alpha_2 = T^{g_2 k}\alpha_1 = \begin{bmatrix} a + cg_2k & b_1 + d_1g_2k \\ c & d_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d_1 \end{bmatrix} \in \Gamma(k), \quad l|b_2.$$

同理，必有整数 g_3 满足

$$c/k + d_1 g_3 \equiv 0 \pmod{l/k},$$

所以进一步有

$$\alpha_3 = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g_3k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 + b_2g_3k & b_2 \\ c + d_1g_3k & d_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_3 & b_2 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \in \Gamma(k), \quad l|(b_2, c_1).$$

注意到 $a_3d_1 \equiv 1 \pmod{l}$，及 $l|(b_2, c_1)$，我们有

$$\alpha_4 = \begin{bmatrix} a_3 & a_3d_1 - 1 \\ 1 - a_3d_1 & d_1(2 - a_3d_1) \end{bmatrix} \equiv \alpha_3 \pmod{l}, \quad \alpha_4 \in \Gamma.$$

我们把 α_4 写为

$$\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - d_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & a_3 - 1 \\ 1 - a_3 & 2 - a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_1 - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - d_1 & 1 \end{bmatrix} \alpha_5 \begin{bmatrix} 1 & d_1 - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

以及

$$\alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} T^{a_3 - 1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

由此及 $k|a_3 - 1$，条件(11.50)$(m=k)$，就推出 $\alpha_5 \in \Gamma'$. 由 $\alpha_5 \in \Gamma'$，$k|d_1 - 1$，$T^k \in \Gamma'$ 及对任意整数 g 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ gk & 1 \end{bmatrix} = ST^{-gk}S^{-1} \in \Gamma',$$

就推出 $\alpha_4 \in \Gamma'$. 由此及 $k|l$ 推出 $\alpha_3 \in \Gamma'$. 进而依次推出，α_2, α_1 及 α 均

属于 Γ'. 证毕.

§12　模变换群的不动点

在§8已讨论了完全模变换群 $\overline{\Gamma}$ 的不动点，证明了它的全部抛物点(或尖点)、二阶椭圆点和三阶椭圆点分别由 ∞, i 和 ρ 所确定的三个 $\overline{\Gamma}$ 等价类所组成，并给出了它们的稳定子群(见定理 8.2, 8.3 及 8.4). 本节要来讨论完全模变换群 $\overline{\Gamma}$ 的指数有限的模变换群 $\overline{\Gamma}'$ 的不动点，特别是当 $\Gamma'=\Gamma(n)$, $\Gamma_1(n)$ 和 $\Gamma_0(n)$ 时的情形.

定义 12.1　模变换群 $\overline{\Gamma}'$ 的所有抛物点(或尖点)、二阶椭圆点和三阶椭圆点所组成的集合 $\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}')$、$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}')$ 和 $\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}')$ 关于 $\overline{\Gamma}'$ 的等价类的个数仍分别记作 $\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}')$、$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}')$ 和 $\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}')$. 它们也分别称为是**模变换群 $\overline{\Gamma}'$(不等价)的抛物点(或尖点)的个数，二阶椭圆点的个数**，和**三阶椭圆点的个数**.

这样，定理 8.2, 8.3 及 8.4 就证明了：

$$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma})=\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma})=\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma})=1.$$

设有右陪集分解

$$\overline{\Gamma}=\bigcup_{j=1}^{K}\overline{\Gamma}'\alpha_j. \tag{12.1}$$

下面分二阶椭圆点、三阶椭圆点、及抛物点(尖点)三种情形来讨论. 讨论的基本出发点是(见定理 8.1)：

τ 是 $\overline{\Gamma}'$ 的不动点的充要条件是 τ 是 $\overline{\Gamma}$ 的不动点，且 $\overline{\Gamma}'\cap\overline{\Gamma}_\tau$ 不是平凡子群.

定理 12.1　设 $\overline{\Gamma}'$ 是模变换群且有式(12.1)成立.

(i) τ 是 $\overline{\Gamma}'$ 的二阶椭圆点的充要条件是存在某个 $j(1\leqslant j\leqslant K)$，使得 τ 是 $\overline{\Gamma}'$ 等价于 $\alpha_j(\mathrm{i})$，且有

$$S\in\alpha_j^{-1}\Gamma'\alpha_j, \tag{12.2}$$

即 α_jS 和 α_j 属于右陪集分解(12.1)中 $\overline{\Gamma}'$ 的同一个右陪集；

(ii) $\overline{\Gamma}'$ 的两两不等价二阶椭圆点的个数 $\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}')$ 就是满足式(12.2)的 j 的个数，$1\leqslant j\leqslant K$；

(iii) 当 $\overline{\Gamma}'$ 是 $\overline{\Gamma}$ 正规子群时，$\overline{\Gamma}'$ 有二阶椭圆点的充要条件是 $S\in$

Γ',以及有二阶椭圆点时,$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}')=K$.

证　先来证(i).由定理 8.1 知 $\overline{\Gamma}$ 的二阶椭圆点 τ 一定是 $\overline{\Gamma}$ 等于 i,故由式(12.1)知,必有 $\sigma'\in\overline{\Gamma}'$,及对某个 j 使得 $\tau=\sigma'\alpha_j(\mathrm{i})$.所以 τ 是 $\overline{\Gamma}'$的二阶椭圆点的充要条件是

$$\overline{\Gamma}_\tau\cap\overline{\Gamma}'=((\sigma'\alpha_j)\overline{\Gamma}_{\mathrm{i}}(\sigma'\alpha_j)^{-1})\cap\overline{\Gamma}'$$

不是平凡子群,即

$$(\alpha_j\overline{\Gamma}_{\mathrm{i}}\alpha_j^{-1})\cap\overline{\Gamma}'$$

不是平凡子群.由于 $\Gamma_{\mathrm{i}}=\{\pm I,\pm S\}$,所以这交要么是平凡子群,要么

$$\alpha_j\overline{\Gamma}_{\mathrm{i}}\alpha_j^{-1}\subset\overline{\Gamma}'. \tag{12.3}$$

因而,τ 是 $\overline{\Gamma}'$的二阶椭圆点的充要条件是式(12.3)成立.若式(12.3)成立,则 $\alpha_jS\alpha_j^{-1}$,$\alpha_j(-S)\alpha_j^{-1}$ 至少有一个属于 Γ',注意到 $S^2=-I$,无论哪一个属于 Γ',必推出(这是 $\overline{\Gamma}'$有二阶椭圆点的必要条件)

$$-I\in\Gamma', \tag{12.4}$$

所以,一定两个都属于 Γ'.因而,式(12.3)等价于 $\alpha_jS\alpha_j^{-1}\in\Gamma'$,即式(12.2)成立.由式(12.4)知式(12.2)等价于 α_j 和 α_jS 属于 $\overline{\Gamma}'$的同一个右陪集.这就证明了(i).

下面来证(ii).由(i)知,对满足式(12.2)的 j,$\alpha_j(\mathrm{i})$一定是 $\overline{\Gamma}'$的二阶椭圆点.因此(ii)就是要证明:对满足式(12.2)的不同的 j_1,j_2,$\alpha_{j_1}(\mathrm{i})$和 $\alpha_{j_2}(\mathrm{i})$一定是 $\overline{\Gamma}'$不等价的.若不然,必有 $\sigma'\in\overline{\Gamma}'$使 $\sigma'\alpha_{j_1}(\mathrm{i})=\alpha_{j_2}(\mathrm{i})$,即 $\alpha_{j_2}^{-1}\sigma'\alpha_{j_1}\in\overline{\Gamma}_{\mathrm{i}}$,因而必有 $\alpha_{j_2}^{-1}\sigma'\alpha_{j_1}=S$ 或$-S$.(为什么),所以,α_{j_1}和 $\alpha_{j_2}S$ 属于 $\overline{\Gamma}'$的同一个右陪集.另一方面,由 j_2 满足式(12.2)知,α_{j_2}和 $\alpha_{j_2}S$ 属于 $\overline{\Gamma}'$的同一个右陪集,所以推出 α_{j_1},α_{j_2}属于 $\overline{\Gamma}'$的同一个右陪集,这和假定 $j_1\neq j_2$ 矛盾.(iii)的证明留给读者.证毕.

当 α_j 和 α_jS 属于 $\overline{\Gamma}'$的不同的右陪集时,把这两个右陪集算作一对,以 $\nu_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}')$(或 $\nu_{\mathrm{i}}(\Gamma')$)表示所有式(12.1)中这样的不同的右陪集的对数.那么,由定理 12.1 推出

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}')+2\nu_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}')=K. \tag{12.5}$$

由此容易推出(同定理 12.1(ii)的推导,留给读者):$\overline{\Gamma}$的全体二阶椭圆点按$\overline{\Gamma}'$是否等价可分为

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}')+\nu_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}')=K/2+\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}')/2 \tag{12.6}$$

个$\overline{\Gamma}'$的等价类.

定理 12.2 设$\overline{\Gamma}'$是模变换群且有式(12.1)成立.

(i) τ是$\overline{\Gamma}'$的三阶椭圆点的充要条件是存在某个$j(1\leqslant j\leqslant K)$,使得$\tau$是$\overline{\Gamma}'$等价于$\alpha_j(\rho)$,且有

$$-ST\in\alpha_j^{-1}\Gamma'\alpha_j, \tag{12.7}$$

即$\alpha_j,\alpha_j(-ST)$和$\alpha_j(-ST)^2$属于右陪集分解(12.1)中$\overline{\Gamma}'$的同一个右陪集;

(ii) $\overline{\Gamma}'$的两两不等价三阶椭圆点的个数$\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}')$就是满足式(12.7)的$j$的个数,$1\leqslant j\leqslant K$;

(iii) 当$\overline{\Gamma}'$是$\overline{\Gamma}$正规子群时,$\overline{\Gamma}'$有三阶椭圆点的充要条件是$-ST\in\Gamma'$,以及有三阶椭圆点时,$\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}')=K$.

证 先来证(i).由定理 8.2 及式(12.1)知,τ是$\overline{\Gamma}'$的三阶椭圆点的充要条件是存在$\sigma'\in\overline{\Gamma}'$及某个$j(1\leqslant j\leqslant K)$使得$\tau=\sigma'\alpha_j(\rho)$(即$\tau$是$\overline{\Gamma}'$等价于$\alpha_j(\rho)$),及

$$\overline{\Gamma}_\tau\cap\overline{\Gamma}'=((\sigma'\alpha_j)\overline{\Gamma}_\rho(\sigma'\alpha_j)^{-1})\cap\overline{\Gamma}'$$

不是平凡子群,即

$$\alpha_j\overline{\Gamma}_\rho\alpha_j^{-1}\cap\overline{\Gamma}'$$

不是平凡子群.由于$\Gamma_\rho=\{\pm I,\pm(-ST),\pm(-ST)^2\}$及$(ST)^3=-I$,这交不是平凡子群的充要条件是$\alpha_j(-ST)\alpha_j^{-1}\in\Gamma'$,这就是式(12.7).注意到$(-ST)^3=I$,容易看出式(12.7)等价于$\alpha_j$,$\alpha_j(-ST)$,$\alpha_j(-ST)^2$属于$\overline{\Gamma}'$的同一个右陪集.(ii)就是要证明:对满足式(12.7)的不同的$j_1,j_2,\alpha_{j_1}(\rho)$和$\alpha_{j_2}(\rho)$一定是$\overline{\Gamma}'$不等价的.具体的论证和定理 12.1(ii)完全类似,留给读者.(iii)的证明也留给读者.证毕.

容易看出,$\alpha_j,\alpha_j(-ST),\alpha_j(-ST)^2$要么属于$\overline{\Gamma}'$同一个右陪集,要么分属于三个$\overline{\Gamma}'$的不同的右陪集.把这样的$\overline{\Gamma}'$的三个不同的右陪集看做一组,以$\nu_\rho(\overline{\Gamma}')$(或$\nu_\rho(\Gamma')$)记所有这样的不同的组的个数,我

们就有

$$\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}') + 3\nu_\rho(\overline{\Gamma}') = K. \tag{12.8}$$

由此容易推出：$\overline{\Gamma}$ 的全体三阶椭圆点按 $\overline{\Gamma}'$ 是否等价可分为

$$\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}') + \nu_\rho(\overline{\Gamma}') = K/3 + 2\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}')/3 \tag{12.9}$$

个 $\overline{\Gamma}'$ 的等价类.

定理 12.3 设 $\overline{\Gamma}'$ 是模变换群且有式(12.1)成立.

(i) $\overline{\Gamma}$ 的抛物点 τ 一定是 $\overline{\Gamma}'$ 的抛物点，其稳定子群

$$\overline{\Gamma}'_\tau = (\sigma\alpha_j)\overline{T}_f(\sigma\alpha_j)^{-1}, \tag{12.10}$$

其中

$$\tau = \sigma\alpha_j(\infty), \quad \sigma \in \overline{\Gamma}', \tag{12.11}$$

$$f = \min\{k: k > 0, T^k \in \alpha_j^{-1}\overline{\Gamma}'\alpha_j\}, \tag{12.12}$$

以及

$$T_f = \{\pm T^{nf}: n \in \mathbf{Z}\}. \tag{12.13}$$

f 称为 $\overline{\Gamma}'$ 的抛物点 τ 的**宽度**(或**分歧指数**(ramification index))；

(ii) 设点 $\alpha_j(\infty), 1 \leqslant j \leqslant K$，恰好属于 $\overline{\Gamma}'$ 的 L 个等价类，$\alpha_{j(1)}(\infty), \cdots, \alpha_{j(L)}(\infty)$ 是这 L 个等价类的代表，它们作为 $\overline{\Gamma}'$ 的抛物点的宽度分别为 $f_1, \cdots, f_L$. 那么，$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}') = L$，且有

$$f_1 + \cdots + f_L = K; \tag{12.14}$$

(iii) 当 $\overline{\Gamma}'$ 是 $\overline{\Gamma}$ 的正规子群时，$\overline{\Gamma}'$ 的抛物点的宽度 f 都相等，

$$f = \min\{k: k > 0, T^k \in \overline{\Gamma}'\}, \tag{12.15}$$

以及

$$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}') = K/f. \tag{12.16}$$

证 先来证(i). 由定理 8.3 知 $\overline{\Gamma}$ 的抛物点必 $\overline{\Gamma}$ 等价于∞，所以由式(12.1)推出，必有某个 j 使式(12.11)成立. 因此，τ 是 $\overline{\Gamma}'$ 的抛物点的充要条件是：

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}_\tau \cap \overline{\Gamma}' &= (\sigma\alpha_j)\overline{\Gamma}_\infty(\sigma\alpha_j)^{-1} \cap \overline{\Gamma}' \\ &= (\sigma\alpha_j)(\overline{\Gamma}_\infty \cap \alpha_j^{-1}\overline{\Gamma}'\alpha_j)(\sigma\alpha_j)^{-1}\end{aligned}$$

不是平凡子群，即 $\overline{\Gamma}_\infty \cap \alpha_j^{-1}\overline{\Gamma}'\alpha_j$ 不是平凡子群. 由于 $\alpha_j^{-1}\overline{\Gamma}'\alpha_j$ 是 $\overline{\Gamma}$ 的指数有限的子群，所以必有正整数 k，使 $T^k \in \alpha_j^{-1}\overline{\Gamma}'\alpha_j$，所以式(12.12)右边的集合非空，及正整数 f 存在惟一. 因而有(为什么)

$$\overline{\Gamma}_\infty \cap \alpha_j^{-1}\overline{\Gamma}'\alpha_j = \overline{T}_f, \tag{12.17}$$

它不是平凡子群. 由上两式推出, τ 是 $\overline{\Gamma}'$ 的抛物点, 且式(12.10)成立.

下面来证(ii). 在(i)中已证明了 $\alpha_j(\infty)(1\leqslant j\leqslant K)$ 都是 $\overline{\Gamma}'$ 的抛物点, 且每个 $\overline{\Gamma}'$ 的抛物点一定 $\overline{\Gamma}'$ 等价于某个 $\alpha_j(\infty)$, 所以, $\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}')=L$ 成立. 剩下只要证式(12.14). 首先来证明: 点 $\alpha_r(\infty)$ 和 $\alpha_s(\infty)$ 是 $\overline{\Gamma}'$ 等价的充要条件是存在整数 k, 使得 α_s 和 $\alpha_r T^k$ 属于 $\overline{\Gamma}'$ 的同一个右陪集. 充分性是显然的. 下证必要性. 这时有 $\sigma\in\overline{\Gamma}'$ 使 $\alpha_r(\infty)=\sigma\alpha_s(\infty)$, 所以 $\alpha_r^{-1}\sigma\alpha_s\in\overline{\Gamma}_\infty$, 即存在整数 k 使 $\sigma\alpha_s=\alpha_r T^k$. 这就证明了必要性. 其次, 由式(12.17)推出(为什么): 对固定的 $l(1\leqslant l\leqslant L)$,

$$\alpha_{j(l)},\ \alpha_{j(l)}T,\ \cdots,\ \alpha_{j(l)}T^{f_l-1} \tag{12.18}$$

属于 $\overline{\Gamma}'$ 的两两不同的右陪集, 而 $\alpha_{j(l)}T^{f_l}$ 和 $\alpha_{j(l)}$ 属于 $\overline{\Gamma}'$ 的同一个右陪集. 由 $\alpha_{j(l)}(1\leqslant l\leqslant K)$ 的取法知, 对不同的 l,h, $\alpha_{j(l)}(\infty)$ 和 $\alpha_{j(h)}(\infty)$ 是 $\overline{\Gamma}'$ 不等价的, 所以 $\alpha_{j(h)}T^n$ 和 $\alpha_{j(l)}T^k$, 对任意的整数 n,k, 均属于 $\overline{\Gamma}'$ 的不同的右陪集. 而每一个 $\alpha_r(\infty)$ 必 $\overline{\Gamma}'$ 等价于某个 $\alpha_{j(l)}(\infty)$, 所以 α_r 必和式(12.16)中的某个 $\alpha_{j(l)}T^m(1\leqslant m<f_l)$ 属于 $\overline{\Gamma}'$ 的同一个右陪集. 综合以上讨论就证明了式(12.14). (iii)的证明留给读者. 证毕.

关于定理 12.3 应该指出: $\overline{\Gamma}'$ 的抛物点 τ 的宽度与式(12.11)中的 σ,α_j 的具体取法无关, 以及 $\overline{\Gamma}'$ 等价的抛物点的宽度是相等的. 此外, 若记 $\overline{\Gamma}'$ 的抛物点 $\alpha_j(\infty)(1\leqslant j\leqslant K)$ 的宽度为 g_j, 那么有

$$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}') = \sum_{j=1}^{K} 1/g_j. \tag{12.19}$$

这些结论的证明都留给读者.

由于 $-\sigma$ 和 σ 在 Γ 中是不同的, 现在我们来讨论这样一个问题: **对于 $\overline{\Gamma}'$ 的抛物点 τ, 稳定子群 Γ'_τ(注意: 不是 $\overline{\Gamma}'_\tau$)可能会出现的情形.**

以下的符号与定理 12.3(i)相同. 当 $-I\in\Gamma'$ 时, 显然有

$$\Gamma'_\tau = (\sigma\alpha_j)T_f(\sigma\alpha_j)^{-1}; \tag{12.20}$$

当 $-1\notin\Gamma'$ 时, 会出现两种情形:

$$\Gamma'_\tau = (\sigma\alpha_j)T_f^+(\sigma\alpha_j)^{-1},\quad T_f^+ = \{T^{nf}: n\in \mathbf{Z}\}, \tag{12.21}$$

或
$$\Gamma'_\tau = (\sigma\alpha_j)T_f^-(\sigma\alpha_j)^{-1},\quad T_f^- = \{(-T^f)^n: n\in \mathbf{Z}\}. \tag{12.22}$$

定义 12.2 当式(12.20)或(12.21)成立时, τ 就称为是 $\overline{\Gamma}'$ 的正

则抛物点(尖点)；当式(12.21)成立时，τ 就称为是 $\overline{\Gamma}'$ **的非正则抛物点(尖点)**.

以后会看到 Γ' 的模函数在这两类抛物点处的性质是有所不同的.

附注　以上讨论了 $\overline{\Gamma}$ 的指数有限的子群 $\overline{\Gamma}'$ 的不动点，得到了 $\overline{\Gamma}$ 的不动点是不是 $\overline{\Gamma}'$ 的不动点，以及是 $\overline{\Gamma}'$ 的不动点时的若干性质. 这些结论可推广到以下情形：$\overline{\Gamma}''\subseteq\overline{\Gamma}'\subseteq\overline{\Gamma}$，$\overline{\Gamma}''$ 是 $\overline{\Gamma}'$ 的指数有限的子群，讨论 $\overline{\Gamma}'$ 的不动点是不是 $\overline{\Gamma}''$ 的不动点，以及是 $\overline{\Gamma}''$ 的不动点时有什么性质. 这些讨论留给读者.

下面来求 $\Gamma(n)$，$\Gamma_1(n)$ 和 $\Gamma_0(n)$ 的不等价的不动点的个数.

定理 12.4　设 $n\geqslant 2$. 我们有

(i)　$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}_0(n)) = 0,\ 4\,|\,n;\quad \prod_{p|n}\left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\right),\ 4\nmid n,$

其中 Legendre 符号

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=\begin{cases}0, & p=2,\\ 1, & p\equiv 1\pmod 4,\\ -1, & p\equiv -1\pmod 4).\end{cases}$$

(ii) $\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}_1(2))=1$；$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}_1(n))=0,\ n\geqslant 3$.

(iii) $\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}(n))=0$.

证　先来证(i). 由 $-I\in\Gamma_0(n)$ 及式(11.34)，可得右陪集分解：

$$\overline{\Gamma}=\bigcup_{l|n}\ \bigcup_{\substack{c \bmod n/l\\ (c,l)=1}}^{*}\ \overline{\Gamma}_0(n)\alpha_{l,c},\tag{12.23}$$

其中

$$\alpha_{l,c}=\begin{bmatrix}(1-cc^{-1})/l & -c^{-1}\\ c & l\end{bmatrix},\qquad cc^{-1}\equiv 1(\bmod l).\tag{12.24}$$

进而，由定理 12.1(i)知 $\alpha_{l,c}(\mathrm{i})$ 是 $\Gamma_0(n)$ 的二阶椭圆点的充要条件是

$$\alpha_{l,c}S\alpha_{l,c}^{-1}\in\Gamma_0(n).$$

由计算易得，上式等价于同余方程

$$l^2+c^2\equiv 0\ (\bmod n).$$

由于 l,c 满足式(12.24)中的条件：$l\,|\,n$，$(l,c)=1$，所以上述同余方

程有解的必要条件是 $l=1$. 因而,由定理 12.1(ii)知, $\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}_0(n))$就是同余方程

$$c^2 \equiv -1 \pmod n \tag{12.25}$$

的解数. 由初等数论中熟知的结论(见[P&P3,定理 4.4.1,推论 4.5.3])就推出(i)成立. 求出同余方程(12.25)的全部解 c,并取

$$\alpha_{1,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \tag{12.26}$$

相应的

$$\alpha_{1,c}(\mathrm{i}) = \frac{c+\mathrm{i}}{1+c^2} \tag{12.26$'$}$$

就给出了 $\overline{\Gamma}_0(n)$的全部二阶椭圆点.

下面来证(ii). 由于 $\overline{\Gamma}_1(2)=\overline{\Gamma}_0(2)$, $\overline{\Gamma}_1(3)=\overline{\Gamma}_0(3)$,所以当 $n=2$, 3 时,由(i)知结论成立. 当 $n\geqslant 4$ 时,若 $\Gamma_1(n)$有椭圆点,则必有椭圆元$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in\Gamma_1(n)$,满足 $|a+d|<1$, $a+d\equiv 2 \pmod n$. 但这当 $n\geqslant 4$ 时是不可能的. 所以

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}_1(n)) = \mathscr{E}_{\rho}(\overline{\Gamma}_1(n)) = 0, \quad n \geqslant 4. \tag{12.27}$$

当 $n\geqslant 2$ 时, $-I\notin\Gamma(n)$,由式(12.4)知(iii)成立. 证毕.

定理 12.5 设 $n\geqslant 2$. 我们有

(i) $\mathscr{E}_{\rho}(\overline{\Gamma}_0(n)) = 0,\ 9|n;\quad \prod_{p|n}\left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right),\ 9\nmid n,$

其中 Legendre 符号

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \begin{cases} 0, & p=3, \\ 1, & p\equiv 1 \pmod 3, \\ -1, & p\equiv -1 \pmod 3). \end{cases}$$

(ii) $\mathscr{E}_{\rho}(\overline{\Gamma}_1(2))=0$, $\mathscr{E}_{\rho}(\overline{\Gamma}_1(3))=1$,及 $\mathscr{E}_{\rho}(\overline{\Gamma}_1(n))=0$, $n\geqslant 4$.

(iii) $\mathscr{E}_{\rho}(\overline{\Gamma}(n))=0$.

证 由式(12.23)及定理 12.2(i)知 $\alpha_{l,c}(\rho)$是 $\Gamma_0(n)$的三阶椭圆点的充要条件是 $\alpha_{l,c}(-ST)\alpha_{l,c}^{-1}\in\Gamma_0(n)$. 由计算易得这等价于 l,c 满足同余方程

$$c^2 - lc + l^2 \equiv 0 \pmod n.$$

由于 l,c 满足条件 $l|n$, $(l,c)=1$,所以上述同余方程有解的必要条件

是 $l=1$. 因而由定理 12.2(ii)知，$\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}_0(n))$等于同余方程

$$c^2-c+1\equiv 0 \pmod n \qquad (12.28)$$

的解数. 解数是模 n 的积性函数. 当 $n=2^k$ 时显见解数为零，当 $n=p^k$,素数 $p\geqslant 3$ 时，同余方程(12.28)等价于同余方程$(2c-1)^2+3\equiv 0 \pmod{p^k}$. 显见，$n=3$ 时解数为 1；$n=3^k(k\geqslant 2)$时解数为零；以及当 $p>3$ 时，由初等数论的熟知结论(见[P&P3 定理 4.4.1，式(4.6.14)]) 知解数为 $1+\left(\frac{-3}{p}\right)$. 这就证明了(i). 求出同余方程(12.28) 的全部解 c，取 $\alpha_{1,c}$由式(12.26)给出. 这样

$$\alpha_{1,c}(\rho)=\frac{c+\rho}{c^2+c+1} \qquad (12.29)$$

就给出了 $\overline{\Gamma}_0(n)$的全部三阶椭圆点.

由于 $\overline{\Gamma}_1(2)=\overline{\Gamma}_0(2)$，$\overline{\Gamma}_1(3)=\overline{\Gamma}_0(3)$，所以由(i)及式(12.27)就证明了(ii). 由定理 11.2 知 $\Gamma(n)$是 Γ 的正规子群，所以由式(12.7)及 $-ST\notin\Gamma(n)$ 就推出(iii). 证毕.

最后来讨论抛物点.

定理 12.6　设 $n\geqslant 2$. 我们有

(i) $\overline{\Gamma}_0(n)$的抛物点均是正则的，

$$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_0(n))=\sum_{d\mid n}\varphi((d,n/d)). \qquad (12.30)$$

(ii) $\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_1(2))=\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_1(3))=2$，均为正则；$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_1(4))=3$，两个正则，等价于$\infty$和 0，一个非正则，等价于$-1/2$；以及 $n\geqslant 5$ 时，$\Gamma_1(n)$的抛物点均是正则的，

$$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_1(n))=(1/2)\sum_{d\mid n}\varphi(d)\varphi(n/d). \qquad (12.31)$$

(iii) $\overline{\Gamma}(n)$的抛物点均是正则的，且宽度都等于 n，及

$$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}(2))=3;\quad \mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}(n))=\frac{1}{2}n^2\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right),\quad n\geqslant 3. \qquad (12.32)$$

证　先来证(i). 由于$-I\in\Gamma_0(n)$，所以抛物点一定是正则的. 由定理 12.3 及式(12.23)知 $\alpha_{l,c}(\infty)$是 $\overline{\Gamma}_0(n)$的抛物点，且它的宽度 $f=f_{l,c}^{(n)}$是使 $\alpha_{l,c}T^k\alpha_{l,c}^{-1}\in\Gamma_0(n)$的最小正整数 k，由计算知，这当且仅当

$n|c^2k$ 时成立. 所以

$$f = f_{l,c}^{(n)} = n/(c^2,n). \tag{12.33}$$

由此及定理 12.3(ii)(即式(12.19)),式(12.23)推出

$$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_0(n)) = \sum_{l|n} \sum_{\substack{c \bmod n/l \\ (c,l)=1}}{}^{*} 1/f_{l,c}^{(n)} = \sum_{l|n} \sum_{\substack{c \bmod n/l \\ (c,l)=1}}{}^{*} \frac{(c^2,n)}{n}$$

$$= \sum_{l|n} \sum_{\substack{d \bmod n/l \\ (d,l,n/l)=1}} \frac{(d^2,n/l)}{n} = F(n),$$

这里用到了: 存在整数 k 使 $c=d+kn/l$ 与 l 互素的充要条件是 $(d,l,n/l)=1$,以及 $(c,l)=1$ 时有 $(c^2,n)=(d^2,n/l)$. 容易验证 $F(n)$ 是 n 的积性函数(留给读者),且有

$$F(p^r) = \frac{1}{p^r}\left\{p^{r-1} + \sum_{d=1}^{p^r}(d^2,p^r)\right\}$$

$$= \begin{cases} p^{r/2} + p^{r/2-1}, & 2|r, \\ 2p^{[r/2]}, & 2\nmid r. \end{cases} \tag{12.34}$$

由直接验证可得

$$F(p^r) = \sum_{l|p^r} \varphi((l,p^r/l)). \tag{12.35}$$

综合以上各式就证明了式(12.30).

下面来证(ii). $n=2,3$ 时,由(i)及 $\overline{\Gamma}_1(2)=\overline{\Gamma}_0(2)$, $\overline{\Gamma}_1(3)=\overline{\Gamma}_0(3)$ 推出. 所以只要讨论 $n\geqslant 4$. 由 $-I\notin\Gamma_1(n)(n\geqslant 3)$ 及式(11.21)得

$$\overline{\Gamma}_0(n) = \bigcup_{\substack{1\leqslant a<n/2 \\ (a,n)=1}} \overline{\Gamma}_1(n)\rho(a), \tag{12.36}$$

其中 $\rho(a)$ 由式(11.22)给出. 由此及式(12.23)得

$$\overline{\Gamma} = \bigcup_{l|n} \bigcup_{\substack{c \bmod n/l \\ (c,l)=1}}{}^{*} \bigcup_{\substack{1\leqslant a<n/2 \\ (a,n)=1}} \overline{\Gamma}_1(n)\rho(a)\alpha_{l,c}. \tag{12.37}$$

由此及定理 12.3 知, $\rho(a)\alpha_{l,c}(\infty)$ 是 $\overline{\Gamma}_1(n)$ 的抛物点,其宽度 $f=f_{a,l,c}^{(n)}$ 是使 T^k 或 $-T^k$ 属于 $(\rho(a)\alpha_{l,c})^{-1}\Gamma_1(n)(\rho(a)\alpha_{l,c})$ 的最小正整数 k. 由于 $\Gamma_1(n)$ 是 $\Gamma_0(n)$ 的正规子群,所以 $f=f_{a,l,c}^{(n)}$ 就是使

$$\alpha_{l,c}T^k\alpha_{l,c}^{-1} \in \Gamma_1(n) \tag{12.38}$$

或

$$\alpha_{l,c}(-T^k)\alpha_{l,c}^{-1} \in \Gamma_1(n) \tag{12.39}$$

的最小正整数 k,我们分别来讨论这两种情形. 分别以 k^+ 和 k^- 表示

使式(12.38)和式(12.39)成立的最小正整数 k. 由计算易得, k^+ 是满足

$$\begin{cases}1-(1-cc^{-1})kc/l\equiv 1 \pmod n,\\ kc^2\equiv 0 \pmod n\end{cases}\tag{12.40}$$

的最小正整数 k, 而 k^- 是满足

$$\begin{cases}-1-(1-cc^{-1})kc/l\equiv 1 \pmod n,\\ kc^2\equiv 0 \pmod n\end{cases}\tag{12.41}$$

的最小正整数 k. 设 $k=nk'/(n,c^2)$. 同余方程组(12.40)等价于

$$\frac{1-cc^{-1}}{l}ck'\equiv 0 \pmod{(n,c^2)},$$

其解为 $k'\equiv 0(\bmod (n,c^2)/(n,c))$. 因此,

$$k^+=n/(n,c).\tag{12.42}$$

同余方程组(12.41)等价于

$$\frac{1-cc^{-1}}{l}\frac{cn}{(n,c^2)}k'\equiv -2 \pmod n.\tag{12.43}$$

注意到若 $p^r\parallel n, p^s\parallel c$, 则有

$$\frac{p^r\cdot p^s}{(p^r,p^{2s})}=\begin{cases}p^s, & r\leqslant 2s;\\ p^{r-s}, & r>2s.\end{cases}\tag{12.44}$$

所以, 同余方程(12.43)有解的必要条件是 $n=2^r, r\geqslant 2$(因为 $n\geqslant 4$), 及 $4\nmid c$. 这时, c 为奇数时(12.43)一定无解. 由于 $l\mid n=2^r$, 所以(12.43)有解的必要条件是: $n=2^r(r\geqslant 2), l=1, c=2c_1, 2\nmid c_1$. 这时同余方程(12.43)变为

$$(1-cc^{-1})\frac{c_1\cdot 2^r}{2}k'\equiv -2(\bmod 2^r).$$

显见, 它仅当 $r=2$ 即 $n=4$ 时有解 $k'\equiv 1(\bmod 2)$. 因而, 同余方程组(12.41)仅当 $n=4, l=1, c=2$ 时有解: $k=k'\equiv 1(\bmod 2)$. 所以推出:

$$k^-=1,\quad 当\ n=4,\ l=1,\ c=2.\tag{12.45}$$

由式(12.42)和(12.45)推出: 当 $n=4$, $a=1$, $l=1$, $c=2$ 时

$$f^{(4)}_{1,1,2}=k^-=1,\tag{12.46}$$

它所对应的是非正则抛物点. 在所有其他情形, 都是正则抛物点, 以及

$$f_{a,l,c}^{(n)} = k^+ = \frac{n}{(n,c)}. \tag{12.47}$$

由此及式(12.36)和(12.37)推出(类似式(12.33))：当 $n \geqslant 5$ 时，

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_1(n)) &= \sum_{\substack{1\leqslant a<n/2\\(a,n)=1}} \sum_{l|n} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{c \bmod n/l\\(c,l)=1}} \frac{1}{f_{a,l,c}^{(n)}} \\
&= \frac{1}{2}\varphi(n) \sum_{l|n} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{c \bmod n/l\\(c,l)=1}} \frac{(c,n)}{n} \\
&= \frac{1}{2}\varphi(n) \sum_{l|n} \sum_{\substack{d \bmod n/l\\(d,l,n/l)=1}} \frac{(d,n/l)}{n} \\
&= \frac{1}{2}\varphi(n) G(n).
\end{aligned} \tag{12.48}$$

可以证明(留给读者)：$G(n)$是积性函数，且有

$$\begin{aligned}
G(p^r) &= \frac{1}{p^r}\{(r+1)p^r - (r-1)p^{r-1}\} \\
&= \left\{(r-1)\left(1-\frac{1}{p}\right)+2\right\}.
\end{aligned}$$

进而推出

$$\begin{aligned}
\varphi(p^r)G(p^r) &= \varphi(p^r)\left((r-1)\left(1-\frac{1}{p}\right)+2\right) \\
&= \sum_{d|p^r} \varphi(d)\varphi\left(\frac{p^r}{d}\right).
\end{aligned}$$

由此及式(12.48)就推出式(12.31).

当 $n=4$ 时，由式(12.46)，(12.47)和(12.48)得

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_1(4)) &= \sum_{l|4} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{c \bmod 4/l\\(c,l)=1}} \frac{1}{f_{1,l,c}^{(4)}} \\
&= \sum_{c=1}^{4} \frac{1}{f_{1,1,c}^{(4)}} + \sideset{}{^*}\sum_{\substack{c \bmod 2\\(c,2)=1}} \frac{(4,c)}{4} + \sideset{}{^*}\sum_{\substack{c \bmod 1\\(c,4)=1}} \frac{(4,c)}{4} \\
&= \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3.
\end{aligned}$$

这就证明了 $n=4$ 时的结论. 请读者自己写出 $\overline{\Gamma}_1(4)$的所有不等价抛物点.

最后来证(iii). 注意到$-I\in\Gamma(2)$,及$-I\notin\Gamma(n)$, $n\geqslant 3$,在式(12.1)中取$\overline{\Gamma}'=\overline{\Gamma}(n)$时,由定理 11.3 知

$$K=[\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma}(n)]=\begin{cases}6, & n=2,\\ \dfrac{1}{2}n^3\prod\limits_{p\mid n}\left(1-\dfrac{1}{p^2}\right), & n\geqslant 3.\end{cases}$$

由定理 11.2 知$\overline{\Gamma}(n)$是$\overline{\Gamma}$的正规子群,所以它的抛物点宽度f都相等,由式(12.17)知,$f=n$, $T^n\in\Gamma(n)$,所以抛物点都是正则的. 由此及上式就证明了(iii). 证毕.

定理 12.6(iii)的证明虽然很简单,但并没有给出$\overline{\Gamma}(n)$的全体不等价的抛物点的具体形式. 下面将通过具体给出$\overline{\Gamma}(n)$的全体不等价的抛物点来给出定理 12.6(iii)的另一证明.

定理 12.7　设$n\geqslant 2$. $\overline{\Gamma}(n)$的一组两两不等价的抛物点的代表系可以取为所有满足以下条件的数对$\{s,r\}$给出的一组分数$\{s/r\}$:

$$(s,r)=1,\ s/r\text{ 两两不等, 以及数对}\{s,r\}\text{ 两两对模 }n\text{ 不同余,}\tag{12.49}$$

这里数对$\{s_1,r_1\}$和$\{s_2,r_2\}$对模n同余就是

$$s_1\equiv s_2(\mathrm{mod}\,n),\quad r_1\equiv r_2(\mathrm{mod}\,n)$$

同时成立. 此外,有式(12.32)成立.

证　设$(s_1,r_1)=1$, $(s_2,r_2)=1$. s_1/r_1, s_2/r_2是$\overline{\Gamma}(n)$的等价抛物点就是存在$\alpha\in\Gamma(n)$使得$\alpha(s_1/r_1)=s_2/r_2$,即

$$\begin{bmatrix}s_2\\ r_2\end{bmatrix}=\pm\alpha\begin{bmatrix}s_1\\ r_1\end{bmatrix}.\tag{12.50}$$

我们来证明: s_1/r_1, s_2/r_2是$\overline{\Gamma}(n)$的等价尖点的充要条件是

$$s_1\equiv s_2(\mathrm{mod}\,n),\quad r_1\equiv r_2(\mathrm{mod}\,n),\tag{12.51}$$

或

$$s_1\equiv -s_2(\mathrm{mod}\,n),\quad r_1\equiv -r_2(\mathrm{mod}\,n)\tag{12.52}$$

成立. 必要性由式(12.50)立即推出. 现证充分性. 假定式(12.51)成立(式(12.52)成立时可同样证明,留给读者). 取

$$\sigma_j=\begin{bmatrix}s_j & b_j\\ r_j & d_j\end{bmatrix}\in\Gamma,\quad j=1,2,\tag{12.53}$$

及$k=d_2b_1-b_2d_1$. 显然有$\sigma_2T^k\sigma_1^{-1}(s_1/r_1)=s_2/r_2$. 所以只要证明对所取的$k$有$\sigma_2T^k\sigma_1^{-1}\in\Gamma(n)$. 我们有

$$\sigma_2 T^k \sigma_1^{-1} = \begin{bmatrix} s_2 d_1 - (s_2 k + b_2) r_1 & -s_2 b_1 + (s_2 k + b_2) s_1 \\ r_2 d_1 - (r_2 k + d_2) r_1 & -r_2 b_1 + (r_2 k + d_2) s_1 \end{bmatrix}.$$

由式(12.51),(12.53)及 $k=d_2b_1-b_2d_1$ 得

$$\begin{aligned} s_2 d_1 - (s_2 k + b_2) r_1 &\equiv s_2 d_1 - b_2 r_1 - s_2 r_1 (d_2 b_1 - b_2 d_1) \\ &\equiv s_1 d_1 - b_2 r_2 - s_2 r_1 d_2 b_1 + s_1 r_2 b_2 d_1 \\ &\equiv s_1 d_1 (1 + r_2 b_2) - b_2 r_2 - s_2 r_1 d_2 b_1 \\ &\equiv s_1 d_1 s_2 d_2 - b_2 r_2 - s_2 r_1 d_2 b_1 \\ &\equiv s_2 d_2 - b_2 r_2 \equiv 1 \pmod n. \end{aligned}$$

同理证明

$$-r_2 b_1 + (r_2 k + d_2) s_1 \equiv 1 \pmod n.$$

同样由式(12.51),(12.53)及 $k=d_2b_1-b_2d_1$ 得

$$\begin{aligned} r_2 d_1 - (r_2 k + d_2) r_1 &\equiv r_2 d_1 - d_2 r_1 - r_1 r_2 (d_2 b_1 - b_2 d_1) \\ &\equiv r_2 d_1 (1 + r_2 b_2) - d_2 r_1 - r_1 r_2 d_2 b_1 \\ &\equiv r_2 d_1 s_2 d_2 - d_2 r_1 - r_1 r_2 d_2 b_1 \\ &\equiv r_2 d_2 (s_1 d_1 - r_1 b_1) - d_2 r_2 \equiv 0 \pmod n. \end{aligned}$$

同理证明

$$-s_2 b_1 + (s_2 k + b_2) s_1 \equiv 0 \pmod n.$$

这就证明了所要的结论. 由此就推出(为什么): 满足式(12.49)的 $\{s/r\}$ 就给出了 $\overline{\Gamma}(n)$ 的一个抛物点代表系. 下面来证式(12.32)成立,即计算满足(12.49)的数对 $\{s,r\}$ 的个数. 这些数对可看做是环

$$\mathbf{Z}_n^2 = \{x \bmod n, y \bmod n\} \tag{12.54}$$

中的元素(为什么). 先不考虑条件 s/r 两两不等,那么使得 $(s,r)=1$, $\{s,r\}$ 两两对模 n 不同余的数对一定是环 $\mathbf{Z}_n^2$ 中满足 $(x,y,n)=1$ 的元素(为什么). 因此,总的个数是:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ (x,y,n)=1}}^{n} \sum_{y=1}^{n} 1 &= \sum_{x=1}^{n} \sum_{y=1}^{n} \sum_{d \mid (x,y,n)} \mu(d) \\ &= \sum_{d \mid n} \mu(d) \frac{n^2}{d^2} = n^2 \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \\ &= [\Gamma : \Gamma_1(n)], \end{aligned} \tag{12.55}$$

最后一步用到了定理 11.3. 这些数对中,两个不同的数对 $\{s_1, r_1\}$,

$\{s_2,r_2\}$若满足 $s_1/r_1=s_2/r_2$,则必有 $s_2=-s_1,r_2=-r_1$,且要求

$$-s_1\equiv s_1(\bmod n),\quad -r_1\equiv r_1(\bmod n)$$

不同时成立.这在 $n=2$ 时不可能出现,而当 $n>2$ 时一定出现(为什么).由此及式(12.55)就推出式(12.32).证毕.

应该指出:环 $\boldsymbol{Z}_n^2$ 中满足(x,y,n)的元素就是它的 n 阶元素(为什么).所以,我们就说定理 12.3 中的数对$\{s,r\}$就是 $\boldsymbol{Z}_n^2$ 中使得 s/r 两两不等的所有 n 阶元素.

§13　模变换群的基本区域及生成元

§9 讨论了 $\boldsymbol{H}^*$ 关于完全模变换群 $\overline{\Gamma}$ 的代表集合,证明它一定可以取为由一个单连通区域添加其部分边界所组成的基本区域.本节要讨论 $\boldsymbol{H}^*$ 关于 $\overline{\Gamma}$ 的指数有限的子群 $\overline{\Gamma}'$(即式(13.1)成立)的代表集合$\{\overline{\Gamma}'\backslash\boldsymbol{H}^*\}$(即$\{\Gamma'\backslash\boldsymbol{H}^*\}$),证明它也一定可以取为由一个单连通区域添加其部分边界所组成的区域,即是一个基本区域.

定理 13.1　设 $\overline{\Gamma}'$是模变换群,有右陪集分解

$$\overline{\Gamma}=\bigcup_{j=1}^{K}\overline{\Gamma}'\alpha_j. \tag{13.1}$$

再设 $\mathscr{F}^*=\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma})$(定理 9.4)是完全模变换群的基本区域.我们有

(i)
$$G^*(\overline{\Gamma}')=\bigcup_{j=1}^{K}\alpha_j\mathscr{F}^* \tag{13.2}$$

是模变换群 $\overline{\Gamma}'$的代表集合,这里右边并集中的 $\overline{\Gamma}'$等价点只取一点;

(ii) 当 $j_1\neq j_2$ 时,$\alpha_{j_1}\mathscr{F}^*$ 和 $\alpha_{j_2}\mathscr{F}^*$ 的公共点或 $\overline{\Gamma}'$等价点仅可能由 $\mathscr{F}^*$ 中的 $\overline{\Gamma}$ 的不动点给出,即若有 $\gamma'\in\overline{\Gamma}',\zeta_1,\zeta_2\in\mathscr{F}^*$ 使得

$$\gamma'\alpha_{j_1}(\zeta_1)=\alpha_{j_2}(\zeta_2)=w,\quad j_1\neq j_2, \tag{13.3}$$

那么,必有 $\zeta_1=\zeta_2=\zeta$ 是 $\overline{\Gamma}$ 的不动点,以及当 ζ 是椭圆点时,w 是 $G^*(\overline{\Gamma}')$ 的内点(在 $\overline{\Gamma}'$等价意义下),当 ζ 是抛物点时,w 也是抛物点;

(iii) $\overline{\Gamma}'$的代表集合一定可取成为基本区域,即由一个单连通区域添加其若干边界组成,一般记为 $\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}')$.

注　事实上,以 $\overline{\Gamma}$ 的任一代表集合代替 $\mathscr{F}^*$,定理 13.1 的(i)和

(ii)都成立.

证 对任一点 $z\in \boldsymbol{H}^*$,必有 $\sigma\in\overline{\Gamma}$ 使 $\sigma(z)\in\mathscr{F}^*$. 由式(13.1)知,必有 α_j 及 $\sigma'\in\overline{\Gamma}'$ 使 $\sigma^{-1}=(\sigma')^{-1}\alpha_j$,因而有

$$\sigma(z)=\alpha_j^{-1}\sigma'(z)\in\mathscr{F}^*,$$

即 $\sigma'(z)\in\alpha_j\mathscr{F}^*$. 这就证明了(i). 显见,对每个 j,$\alpha_j\mathscr{F}^*$ 中的任意两点是不可能 $\overline{\Gamma}'$ 等价的(为什么),因此式(13.2)中的并集中可能有的 $\overline{\Gamma}'$ 等价点只可能出现在式(13.3)的情形. 下面来证(ii). 设式(13.3)成立,则有

$$\alpha_{j_2}^{-1}\gamma'\alpha_{j_1}(\zeta_1)=\zeta_2,\quad j_1\neq j_2.$$

由于 $\mathscr{F}^*$ 是由定理 9.4 中给出的 $\overline{\Gamma}$ 的基本区域,由上式推出 $\zeta_1=\zeta_2=\zeta$ 是 $\overline{\Gamma}$ 的不动点,且 $\zeta=\mathrm{i},\rho$ 或∞. 若 $\zeta=\mathrm{i}$,则

$$\alpha_{j_2}^{-1}\gamma'\alpha_{j_1}\in\Gamma_{\mathrm{i}}=\{\pm I,\pm S\}.$$

由于 $j_1\neq j_2$,所以必有 $\alpha_{j_2}^{-1}\gamma'\alpha_{j_1}=\pm S$,$\gamma'\alpha_{j_1}=\alpha_{j_2}(\pm S)$,即 α_{j_2}和 $\alpha_{j_2}S$ 属于(13.1)的不同的右陪集. 因而 $w=\alpha_{j_2}(\mathrm{i})$的适当小的邻域一定完全属于 $\alpha_{j_2}\mathscr{F}^*\cup(\alpha_{j_2}S)\mathscr{F}^*=\alpha_{j_2}\mathscr{F}^*\cup(\gamma'\alpha_{j_1})\mathscr{F}^*$,即 w 是这个区域的内点. 注意到区域 $\alpha_{j_1}\mathscr{F}^*$ 和 $\gamma'\alpha_{j_1}\mathscr{F}^*$ 是 $\overline{\Gamma}'$ 等价的,所以 w 是 $\alpha_{j_2}\mathscr{F}^*\cup\alpha_{j_1}\mathscr{F}^*$ 的内点(注意:这就是这里所说的"内点"的含义,参见§9),因而是 $G^*(\overline{\Gamma}')$的内点. 若 $\zeta=\rho$,则

$$\alpha_{j_2}^{-1}\gamma'\alpha_{j_1}\in\Gamma_\rho=\{\pm I,\pm ST,\pm(ST)^2\}.$$

同样,由 $j_1\neq j_2$ 推出仅可能有:$\gamma'\alpha_{j_1}=\alpha_{j_2}(\pm ST)$或 $\alpha_{j_2}(\pm(ST)^2)$,即 $\alpha_{j_2},\alpha_{j_2}(ST),\alpha_{j_2}((ST)^2)$属于(13.1)的三个不同的右陪集(为什么). 因而 $w=\alpha_{j_2}(\rho)$的适当小的邻域一定完全属于 $\alpha_{j_2}\mathscr{F}^*\cup(\alpha_{j_2}ST)\mathscr{F}^*\cup(\alpha_{j_2}(ST)^2)\mathscr{F}^*$,即 w 是这区域的内点,而区域$(\alpha_{j_2}ST)\mathscr{F}^*$,$(\alpha_{j_2}(ST)^2)\mathscr{F}^*$ 必分别和式(13.2)右边的某两个区域 $\alpha_j\mathscr{F}^*$ 是 $\overline{\Gamma}'$ 等价的,这就证明了 w 是 $G^*(\overline{\Gamma}')$的内点. 最后若 $\zeta=\infty$,这时必有

$$\alpha_{j_2}^{-1}\gamma'\alpha_{j_1}\in\Gamma_\infty=\{\pm T^k:k\in\boldsymbol{Z}\}.$$

由于 α_{j_1}和 α_{j_2}属于式(13.1)中的不同的右陪集,所以必有 $k_0\neq 0$ 使 $\gamma'\alpha_{j_1}=\pm\alpha_{j_2}T^{k_0}$, 即 $\alpha_{j_2},\alpha_{j_2}T^{k_0}$属于式(13.1)中的不同的右陪集. 容易

证明(留给读者)：对任一 $\alpha\in\Gamma$，必有正整数 l，使 α 和 αT^l 属于式(13.1)中的同一个右陪集，记这样的最小正整数为 L. 因此

$$\alpha,\ \alpha T,\ \cdots,\ \alpha T^{L-1}$$

分属式(13.1)中的不同的右陪集，且任一 $\pm\alpha T^k$ 必和其中一个属于同一右陪集(为什么). 现取 $\alpha=\alpha_{j_2}$，由于 α_{j_2}和 $\alpha_{j_2}T^{k_0}(k_0\neq 0)$属于不同的右陪集，所以相应于 α_{j_2}的最小正整数 $L\geqslant 2$. 这时，

$$w=\alpha_{j_2}(\mathrm{i}\infty)=\alpha_{j_2}T(\mathrm{i}\infty)=\cdots=\alpha_{j_2}T^{L-1}(\mathrm{i}\infty)$$

是 $\overline{\Gamma}'$的抛物点，且在这抛物点 w 处有且恰有 L 个模三角形 $\alpha_{j_2}(\mathscr{F}^*)$，$\alpha_{j_2}T(\mathscr{F}^*)$，$\cdots$，$\alpha_{j_2}T^{L-1}(\mathscr{F}^*)$，它们本身或其 $\overline{\Gamma}'$等价的模三角形都属于 $G^*(\overline{\Gamma}')$. 显见，这里的 L 就是定理 12.3 中的抛物点的宽度，它的几何意义就是 $\overline{\Gamma}'$的基本集合中有且恰有 L 个模三角形(在 $\overline{\Gamma}'$等价的意义下)包含这一抛物点.

现来证明最后一个结论(iii). 这就是要证明一定能具体取到一组特定的右陪集代表元 α_j，$1\leqslant j\leqslant K$，使得由式(13.2)给出的 $G^*(\overline{\Gamma}')$是一单连通区域添加其若干边界，即是基本区域. 下面来给出一种构造方法. 先取 $\alpha_1=I$，$\alpha_1\mathscr{F}^*=\mathscr{F}^*$是一个模三角形，和 $\mathscr{F}^*$有公共边界的模三角形是：$T^{-1}\mathscr{F}^*$，$T\mathscr{F}^*$和 $S\mathscr{F}^*$. 若 T^{-1}，T 和 S 都属于 $\overline{\Gamma}'$，则 $\overline{\Gamma}'=\overline{\Gamma}$(为什么)，所以结论成立. 不然，$T^{-1}$，$T$，$S$ 中不属于 $\overline{\Gamma}'$的必属于 $\overline{\Gamma}'$的若干个不同的右陪集，这些不同的右陪集的代表元素就从 T^{-1}，T，S 中选取. 这样就取定了

$$I=\alpha_1;\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{l_1},\quad l_1\geqslant 2,$$

它们属于不同的右陪集，且相应的模三角形的并集($\overline{\Gamma}'$等价点仅取一点)

$$\mathscr{A}_1=\bigcup_{j=1}^{l_1}\alpha_j\mathscr{F}^*$$

是一个单连通区域添加其若干边界. 继续对每一个 $\alpha_j\mathscr{F}^*$，$1<j\leqslant l_1$，重复上面的讨论. 和模三角形 $\alpha_j\mathscr{F}^*$有公式边界的模三角形是：$(\alpha_jT^{-1})\mathscr{F}^*$，$(\alpha_jT)\mathscr{F}^*$，及$(\alpha_jS)\mathscr{F}^*$. 若它们均和 $\mathscr{A}_1$ 中的某个模三角形 $\overline{\Gamma}'$等价，则表明 α_jT^{-1}，α_jT，α_jS 相应地属于某个右陪集 $\overline{\Gamma}'\alpha_i(1\leqslant i\leqslant l_1)$ (为什么). 不然，它们必属于这 l_1 个之外的若干个不

同的右陪集之中,这些右陪集的代表元素就从这三个中选取.对每个 $\alpha_j(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 作这样的讨论,若不增加不同的右陪集,则有

$$\overline{\Gamma}=\bigcup_{j=1}^{l_1}\overline{\Gamma}'\alpha_j,$$

$\mathscr{A}_1$ 就是 $\overline{\Gamma}'$的基本区域.不然,就得到

$$\alpha_1;\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{l_1};\ \alpha_{l_1+1},\ \cdots,\ \alpha_{l_2},\quad 2\leqslant l_1<l_2,$$

它们属于 $\overline{\Gamma}'$的不同的右陪集,且相应的模三角形的并集($\overline{\Gamma}'$等价点仅取一点)

$$\mathscr{A}_2=\bigcup_{j=1}^{l_2}\alpha_j\mathscr{F}^*$$

是一个单连通区域添加其若干边界.这样不断进行下去,由于 $\overline{\Gamma}'$是 $\overline{\Gamma}$ 的指数有限的子群,最后必可得到

$$\alpha_1=I;\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{l_1};\ \alpha_{l_1+1},\ \cdots,\ \alpha_{l_2};\ \cdots;\ \alpha_{l_{r-1}+1},\ \cdots,\ \alpha_{l_r},$$

$$1\leqslant l_1<l_2<\cdots<l_r, \tag{13.4}$$

使得对任一 $\alpha_j(1\leqslant j\leqslant l_r)$与模三角形 $\alpha_j\mathscr{F}^*$有公共边界的每个模三角形一定 $\overline{\Gamma}'$等价于某个 $\alpha_i\mathscr{F}^*(1\leqslant i\leqslant l_r)$.并集($\overline{\Gamma}'$等价点仅取一点)

$$\mathscr{A}=\bigcup_{j=1}^{l_r}\alpha_j\mathscr{F}^* \tag{13.5}$$

是一个单连通区域添加其若干边界.我们来证明:式(13.4)就给出了 $\overline{\Gamma}'\backslash\overline{\Gamma}$ 的一组右陪集代表元素(所以 $l_r=K$),以及由式(13.5)给出的 $\mathscr{A}$ 就是 $\overline{\Gamma}'$的基本区域.用反证法.设 $\alpha\in\overline{\Gamma}$,$\alpha$ 不属于任一右陪集 $\overline{\Gamma}'\alpha_j(1\leqslant j\leqslant l_r)$,因此,$\alpha\mathscr{F}^*$和任一 $\alpha_j\mathscr{F}^*$是 $\overline{\Gamma}'$不等价的.在模三角形 $\alpha_1\mathscr{F}^*=\mathscr{F}^*$及 $\alpha\mathscr{F}^*$中一定可各取一不是 $\overline{\Gamma}$ 的不动点的内点 τ_1 及 τ.由于 $\sigma\mathscr{F}^*$,$\sigma\in\overline{\Gamma}$,不重复地覆盖了整个 H^*,所以一定可用一条不经过 $\overline{\Gamma}$ 的不动点的折线(不自交)连结 τ_1 和 τ,这条折线一定分段属于一串模三角形

$$\sigma_1\mathscr{F}^*=\alpha_1\mathscr{F}^*=\mathscr{F}^*,\ \sigma_2\mathscr{F}^*,\ \cdots,\ \sigma_{s-1}\mathscr{F}^*,\ \sigma_s\mathscr{F}^*=\alpha\mathscr{F}^*.$$

这样,必有一个正整数 m,$1\leqslant m<s$,使得对某个 $j_1(1\leqslant j_1\leqslant l_r)$有 $\sigma_m\mathscr{F}^*=\alpha_{j_1}\mathscr{F}^*$,而所有的 $\sigma_i\mathscr{F}^*$,$m<i\leqslant s$,和任一 $\alpha_j\mathscr{F}^*$都不同.由于 $\sigma_{m+1}\mathscr{F}^*$和 $\sigma_m\mathscr{F}^*=\alpha_j\mathscr{F}^*$有公共边界,由并集 $\mathscr{A}$ 的定义知

$\sigma_{m+1}\mathscr{F}^*$ 必 $\overline{\Gamma}'$等价于某个 $\alpha_{j_2}\mathscr{F}^*$(即存在 $\gamma\in\overline{\Gamma}'$使 $\gamma(\sigma_{m+1}\mathscr{F}^*)=\alpha_{j_2}\mathscr{F}^*$). 由于 $\gamma\sigma_{m+2}\mathscr{F}^*$ 和 $\gamma\sigma_{m+1}\mathscr{F}^*=\alpha_{j_2}\mathscr{F}^*$ $(\gamma\in\overline{\Gamma}')$有公共边界，由 $\mathscr{A}$ 的定义推出 $\gamma\sigma_{m+2}\mathscr{F}^*$，即 $\sigma_{m+2}\mathscr{F}^*$ 和某个 $\alpha_{j_3}\mathscr{F}^*$ 是 $\overline{\Gamma}'$等价. 这样，依此就推出 $\sigma_s\mathscr{F}^*=\alpha\mathscr{F}^*$ 必 $\overline{\Gamma}'$等价于某个 $\alpha_{j_0}\mathscr{F}^*$，和假设矛盾. 这就证明了所要的结论，且一定有 $l_r=K$. 证毕.

在定理 13.1(iii)的证明中用到 $\overline{\Gamma}'$中的这样一种变换：对任一模三角形 $\sigma\mathscr{F}^*$ $(\sigma\in\overline{\Gamma})$，它不同于由式(13.5)给出的 $\overline{\Gamma}'$的基本区域 $\mathscr{A}$ 中的任一 $\alpha_j\mathscr{F}^*$，但和某一 $\alpha_l\mathscr{F}^*$ 有公共边界，那么，必有 $\gamma\in\overline{\Gamma}'$使得

$$\sigma\mathscr{F}^*=\gamma\alpha_l\mathscr{F}^*,\quad \text{即} \quad \sigma\in\overline{\Gamma}'\alpha_l. \tag{13.6}$$

定义 13.1 我们把满足式(13.6)的变换 $\gamma\in\overline{\Gamma}'$称为是(关于基本区域 $\mathscr{A}$ 的)$\overline{\Gamma}'$的**边界替换**.

显见，$\overline{\Gamma}'$边界替换是和 $\overline{\Gamma}'$的基本区域的具体取法有关. 定理 13.1(iii) 的证明过程实际上是证明了以下结论：对所取的 $\overline{\Gamma}'$的基本区域 $\mathscr{A}$(见式(13.5))，以 $\overline{\Gamma}''$表示所有(关于基本区域 $\mathscr{A}$ 的)$\overline{\Gamma}'$的边界替换所生成的子群，那么，任一不属于 $\mathscr{A}$ 的模三角形一定 $\overline{\Gamma}''$等价于 $\mathscr{A}$ 中的某个 $\alpha_l\mathscr{F}^*$. 因此，对任一 $\sigma'\in\overline{\Gamma}'$必有 $\sigma''\in\overline{\Gamma}''$及某个 l，使得 $\sigma''\sigma'\mathscr{F}^*=\alpha_l\mathscr{F}^*$. 由于 $\sigma''\sigma'\in\overline{\Gamma}'$，从式(13.4)中 α_j 的取法知必有 $\alpha_l=\alpha_1=I$. 因此，$\sigma''\sigma'=I$，即 $\sigma'\in\overline{\Gamma}''$. 这就证明了

定理 13.2 设模变换群 $\overline{\Gamma}'$的基本区域由式(13.4)和(13.5)给出. 那么，由 $\overline{\Gamma}'$的全体边界替换生成的群就是 $\overline{\Gamma}'$.

显见，这样的边界替换一定是使 $\overline{\Gamma}'$的某个不动点不变的模变换. 因此，定理 13.2 可以表述为

定理 13.2′ $\overline{\Gamma}'$的生成元由 $\overline{\Gamma}'$的全体不等价不动点的不变子群的生成元组成.

要指出的是，$\overline{\Gamma}'$的全体边界替换不一定是独立的. 例如，当 $\overline{\Gamma}'=\overline{\Gamma}$ 时，对于基本区域 $\mathscr{F}^*$ 有边界替换：T^{-1}，T，S，它们生成 $\overline{\Gamma}$，但独立的生成元可取为 T，S. 进而推出 Γ 的生成元是 T，S. 这给出了定理 7.1 的又一证明. 有时，要在全体边界替换中找出独立的生成元并不容易.

定理 13.1 可作如下推广(留给读者)：

定理 13.3 设模变换群 $\overline{\Gamma}''\subseteq\overline{\Gamma}'\subseteq\overline{\Gamma}$，$\mathscr{F}'$是 $\overline{\Gamma}'$的基本区域，以及有右陪集分解

$$\overline{\Gamma}' = \bigcup_{j=1}^{K}\overline{\Gamma}''\alpha_j.$$

那么，(i)

$$G^*(\overline{\Gamma}'') = \bigcup_{j=1}^{K}\alpha_j\mathscr{F}'$$

是模变换群 $\overline{\Gamma}''$的代表集合，这里右边并集中的 $\overline{\Gamma}''$等价点只取一点；

(ii) 当 $j_1\neq j_2$ 时，$\alpha_{j_1}\mathscr{F}'$和 $\alpha_{j_2}\mathscr{F}'$的公共点或 $\overline{\Gamma}''$等价点仅可能由 $\mathscr{F}'$中的 $\overline{\Gamma}'$的不动点给出，即若有 $\gamma''\in\overline{\Gamma}''$，$\zeta_1,\zeta_2\in\mathscr{F}'$使得

$$\gamma''\alpha_{j_1}(\zeta_1) = \alpha_{j_2}(\zeta_2) = w, \quad j_1\neq j_2,$$

那么，必有 $\zeta_1=\zeta_2=\zeta$ 是 $\overline{\Gamma}'$的不动点，以及当 ζ 是 $\overline{\Gamma}'$的椭圆点时，w 是 $G^*(\overline{\Gamma}'')$的内点(在 $\overline{\Gamma}''$等价意义下)，当 ζ 是抛物点时，w 也是抛物点；

(iii) $\overline{\Gamma}''$的代表集合一定可取成为基本区域，即由一个单连通区域添加其若干边界组成.

在本节最后，我们来介绍刻画同余子群的基本区域特征的一个重要的量——**亏数**. 这是属于 Riemann 曲面理论的内容，这里不作严格讨论，而仅给出几何直观的描述和具体计算方法. 这方面的书很多，我们特别推荐读者看一看 R. Courant 和 H. Robbins 的书《What Is Mathematics》(Oxford University Press，1964. 中译本：《数学是什么》，科学出版社，1985). 它的第五章：拓扑学，非常通俗形象地讨论了这些重要的数学概念和有关知识. 这对初学者和仅需要知道一些基本知识的人来说，它比那些严肃的教科书要好得多. 以下内容就是取自该书，但我们不加证明，仅作直观且不严格的介绍. 需要进一步了解的可去看该书及其他教科书.

在§9 的定义 9.2 及其后，我们指出：$\overline{\Gamma}$ 的基本区域 $\mathscr{F}^*$是一个模三角形$\triangle_0$(不计等价点). 若把它的自然边界上的各对 $\overline{\Gamma}$ 等价点粘合成一点，那么 $\mathscr{F}^*$就成为一个无孔的封闭曲面，仍记作 $\mathscr{F}^*$，且以 ∞,ρ^-,i 及以 i,ρ^+,∞为顶点的两个测地三角形——半模三角形 $\triangle_1,\triangle_2$ 给出了封闭曲面 $\mathscr{F}^*$ 的一个三角形分划. 同样的任一

$\alpha\mathscr{F}^*(\alpha\in\overline{\Gamma})$ 也是 $\overline{\Gamma}$ 的基本区域，作同样的粘合后亦得一无孔的封闭曲面，且半模三角形 $\alpha(\triangle_1)$，$\alpha(\triangle_2)$ 也给出了它的一个三角形分划. 同样的，对同余子群 $\overline{\Gamma}'$，取由式(13.5)给出的它的基本区域，记作 $\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}')$. 如果把它的自然边界上的 $\overline{\Gamma}'$ 等价点粘合成一点，$\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}')$ 就变为一个封闭曲面，仍记作 $\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}')$. 这时，$2K$ 个半模三角形 $\alpha_j(\triangle_1)$，$\alpha_j(\triangle_2)$，$1\leqslant j\leqslant K=l_r$，就自然地给出了这封闭曲面的一个三角形分划，这里的 $\alpha_j(1\leqslant j\leqslant K=l_r)$ 由式(13.4)给出，这称为是 $\overline{\Gamma}'$ **的基本区域的三角形分划**，这样的封闭曲面是可以有孔的. **有没有孔，以及具有不同个数的孔的封闭曲面一定是拓扑不等价的**(即不能通过连续变形把一个封闭曲面变为另一个). 因此，**孔的个数**是刻画封闭曲面拓扑特征的一个重要的量，它称为是**封闭曲面的亏数**(genus). 这样，如何计算亏数就是一个重要的基本问题. 在这里就是要计算同余子群 $\overline{\Gamma}'$ 的封闭曲面 $\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}')$ 的亏数，它也称为是 $\overline{\Gamma}'$ 的**基本区域 $\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}')$ 的亏数**，记作 $g(\overline{\Gamma}')$.

大家知道，对一个简单多面体——没有孔的多面体，有著名的 Euler 公式成立. 设 V，E 及 F 分别是一个多面体的顶点，棱及面的个数. 那么，当这个多面体是简单多面体时有

$$V-E+F=2.$$

对一般的多面体上式就不成立了. 对有一个孔的多面体有

$$V-E+F=2-2.$$

对有两个孔的多面体，有

$$V-E+F=2-2\cdot 2,$$

可以证明：对有 g 个孔的多面体有

$$V-E+F=2-2g. \tag{13.7}$$

通常把 $V-E+F$ 称为这多面体的 **Euler 示性数**，孔的个数即亏数

$$g=1-(V-E+F)/2. \tag{13.8}$$

以上的概念、方法可推广到一般闭曲面，并具体计算亏数. 在一个封闭曲面 P 上，任意标出 $V(\geqslant 3)$ 个顶点，再用位于该曲面上两两不相交的曲线弧(相当于棱)把顶点连接起来，把曲面 P 划分为两两不相交的区域(相当于面)，设弧与区域的个数为 E 与 F. 那么，可以证明：当 P 的亏数为 g 时，不管顶点与曲线弧如何选取，与多面体一

样总有式(13.7)即式(13.8)成立.

现在,就利用式(13.8)来计算同余子群$\overline{\Gamma}'$的基本区域$\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}')$的亏数$g(\overline{\Gamma}')$. 为此就要在封面曲面$\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}')$上取定顶点和曲线弧来给出一个分划. 一个最自然的分划就是由上面$2K$个半模三角形$\alpha_j(\triangle_1)$, $\alpha_j(\triangle_2)$, $1\leqslant j\leqslant K=l_r$所给出的. 这时,面数

$$F = 2K.$$

下面来计算顶点数与曲线弧(即连接两顶点的测地线段)数. 这些顶点都是$\overline{\Gamma}$等价于i,ρ及∞,但它们之间都是$\overline{\Gamma}'$不等价的. 由§12的定理12.1,12.2及12.3知,具体的情形是:

(a) $\overline{\Gamma}$等价于i的顶点. 由定理12.1知这要分为两部分. 一是本身是$\overline{\Gamma}'$的二阶椭圆点,这种顶点个数为$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}=\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}')$,每点处有两条测地线段;二是$\overline{\Gamma}'$的基本区域的内点,这种顶点个数等于

$$\nu_{\mathrm{i}} = \nu_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}') = \frac{1}{2}(K - \mathscr{E}_{\mathrm{i}}),$$

每点处有四条测地线段. 所以,从所有这种顶点处出发的测地线段数共有(注意:这里有重复计数)

$$2\mathscr{E}_{\mathrm{i}} + 4\cdot\frac{1}{2}(K - \mathscr{E}_{\mathrm{i}}) = 2K.$$

(b) $\overline{\Gamma}$等价于ρ的顶点. 由定理12.2知这也分为两类. 一类本身是$\overline{\Gamma}'$的三阶椭圆点,这种顶点数为$\mathscr{E}_\rho=\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}')$,每点处有两条测地线段;另一类是$\overline{\Gamma}'$的基本区域的内点,这种顶点个数等于

$$\nu_\rho = \nu_\rho(\overline{\Gamma}') = \frac{1}{3}(K - \mathscr{E}_\rho),$$

每点处有六条测地线段. 所以,从所有这种顶点处出发的测地线段数共有(注意:这里有重复计数)

$$2\mathscr{E}_\rho + 6\cdot\frac{1}{3}(K - \mathscr{E}_\rho) = 2K.$$

(c) $\overline{\Gamma}$等价于∞的顶点. 由定理12.3知顶点数为$\mathscr{E}_\infty=\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}')$, 由式(12.14)及每个宽度为$f$的抛物点处有$f$个模三角形,即有$2f$条测地线段(见定理12.3(ii)的证明)知,从这种顶点处出发的测地线段数为$2K$(注意:这里有重复计数).

因为每条测地线段(即棱)连接两个顶点,所以在这种分划中,由

以上讨论知，总共的测地线段数为

$$E=\frac{1}{2}(2K+2K+2K)=3K,$$

而总共的顶点数为

$$\begin{aligned}V&=\mathscr{E}_{\mathrm{i}}+\frac{1}{2}(K-\mathscr{E}_{\mathrm{i}})+\mathscr{E}_{\rho}+\frac{1}{3}(K-\mathscr{E}_{\rho})+\mathscr{E}_{\infty}\\&=\frac{5}{6}K+\frac{1}{2}\mathscr{E}_{\mathrm{i}}+\frac{2}{3}\mathscr{E}_{\rho}+\mathscr{E}_{\infty}.\end{aligned}$$

因此

$$V-E+F=-\frac{1}{6}K+\frac{1}{2}\mathscr{E}_{\mathrm{i}}+\frac{2}{3}\mathscr{E}_{\rho}+\mathscr{E}_{\infty},$$

进而，由式(13.8)得亏数的计算公式：

$$g=g(\overline{\Gamma}')=1+\frac{1}{12}K-\frac{1}{4}\mathscr{E}_{\mathrm{i}}-\frac{1}{3}\mathscr{E}_{\rho}-\frac{1}{2}\mathscr{E}_{\infty}.\quad(13.9)$$

当 $\overline{\Gamma}'$是 $\overline{\Gamma}$ 的正规子群时，由§12 定理 12.1，12.2 及 12.3 的讨论知，在 $\overline{\Gamma}'$的基本区域中每个 $\overline{\Gamma}$ 等价于 i，ρ 及∞的顶点处的棱数(即测地线段数)均分别相等，依次记为 $2n_{\mathrm{i}},2n_{\rho},2n_{\infty}$. 由前面的讨论知，它们可能的取值是

$$n_{\mathrm{i}}=\begin{cases}1, & \overline{\Gamma}'\text{ 有二阶椭圆点},\\2, & \overline{\Gamma}'\text{ 无二阶椭圆点},\end{cases}$$

相应的顶点数为 K/n_{i}；

$$n_{\rho}=\begin{cases}1, & \overline{\Gamma}'\text{ 有三阶椭圆点},\\3, & \overline{\Gamma}'\text{ 无三阶椭圆点},\end{cases}$$

相应的顶点数为 K/n_{ρ}，及

$$n_{\infty}=K/\mathscr{E}_{\infty}(\overline{\Gamma}')=f,$$

相应的顶点数为 K/f. 因此，当 $\overline{\Gamma}'$是 $\overline{\Gamma}$ 的正规子群时，$\{n_{\mathrm{i}},n_{\rho},n_{\infty}\}$的取值有以下四种类型：

$$\{1,1,f\},\ \{1,3,f\},\ \{2,1,f\},\ \{2,3,f\},\qquad(13.10)$$

称为**正规子群 $\overline{\Gamma}'$ 的分歧类型**，这里 f 是正整数. 这时亏数公式变为

$$g=g(\overline{\Gamma}')=1-\frac{1}{2}(V-E+F)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{K}{n_i} + \frac{K}{n_\rho} + \frac{K}{f} - 3K + 2K\right)$$

$$= 1 + \frac{K}{2}\left(1 - \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_\rho} - \frac{1}{f}\right). \tag{13.11}$$

§14 几 个 例 子

本节将以几个最简单的同余子群 $\Gamma_0(n)$，$\Gamma_1(n)$，$\Gamma(n)(2\leqslant n\leqslant 5)$，及 Γ_θ 为例，具体给出 Γ 关于它们的右陪集分解和它们相应的基本区域，不等价的不动点，边界替换及生成元. 我们知道所有这些的具体形式是多种多样的，除边界替换及生成元外，在 §11～§13 都已经给出了某种一般的形式(基本区域也可稍加变化得到)，这些形式是很有用的(特别是在作理论推导时)，请读者自己给出. 但这样得到的形式有时并不简洁方便，具体的图示也不整齐美观. 本节将利用证明定理 13.1(iii)的方法来给出它们的右陪集分解，基本区域，从而给出它们的不等价的不动点，边界替换及生成元. 我们将只给出结果，基本上不予证明.

例 14.1 讨论 $\Gamma_0(2)$，$\Gamma_1(2)$，$\Gamma(2)$及 Γ_θ 的情形.

(A) $\Gamma_0(2)$，$\Gamma_1(2)$.

$$-I\in\Gamma_0(2)=\Gamma_1(2), \quad \overline{\Gamma}_0(2)=\overline{\Gamma}_1(2).$$

右陪集分解

$$\overline{\Gamma}=\overline{\Gamma}_0(2)(I\cup S\cup ST)=\overline{\Gamma}_1(2)(I\cup S\cup ST).$$

基本区域(见图 14.1)

$$\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}_0(2))=\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}_1(2))=(I\cup S\cup ST)\mathscr{F}^*$$
$$=\mathscr{F}^*\cup S\mathscr{F}^*\cup ST\mathscr{F}^*.$$

先找虚线∞C，DE 和 OE，即不属于基本区域的边界在基本区域上的 $\Gamma_0(2)$的等价边界. 显然有 $T(\infty A)=\infty C$，$T\in\Gamma_0(2)$；以及

$$DA=ST(BA), \quad DE=ST(BC)=STS(BA)=\sigma_1(DA),$$

$$\sigma_1=STS(ST)^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\in\Gamma_0(2);$$

$$OC=S(\infty A), \quad OE=ST(\infty C)=ST^2(\infty A)=\sigma_2(OC),$$

$$\sigma_2 = ST^2S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \in \Gamma(2).$$

因此，∞C 和 ∞A，DE 和 DA，OE 和 OC 分别是 $\Gamma_0(2)$ 等价的. 由此看出：

(i) 点 A,E,C 是 $\Gamma_0(2)$ 等价的，所以**没有三阶椭圆点**，即

$$\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}_0(2)) = \mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}_1(2)) = 0;$$

(ii) $D=ST(\mathrm{i})=(\mathrm{i}-1)/2$ 是 $\Gamma_0(2)$ 在基本区域上的**惟一的二阶椭圆点**，即

$$\mathscr{E}_\mathrm{i}(\overline{\Gamma}_0(2)) = \mathscr{E}_\mathrm{i}(\overline{\Gamma}_1(2)) = 1,$$

稳定子群是 $\{(ST)S(ST)^{-1}\}$.

(iii) 点 ∞ 和 0 是 $\Gamma_0(2)$ 在基本区域上的尖点(**抛物点**)，

$$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_0(2)) = \mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_1(2)) = 2,$$

尖点 $\infty = I(\infty)$ 的宽度 $f=1$，稳定子群是 $\{T\}$；尖点 $0=S(\infty)=ST(\infty)$ 的宽度 $f=2$，稳定子群是 $\{ST^2S^{-1}\}$.

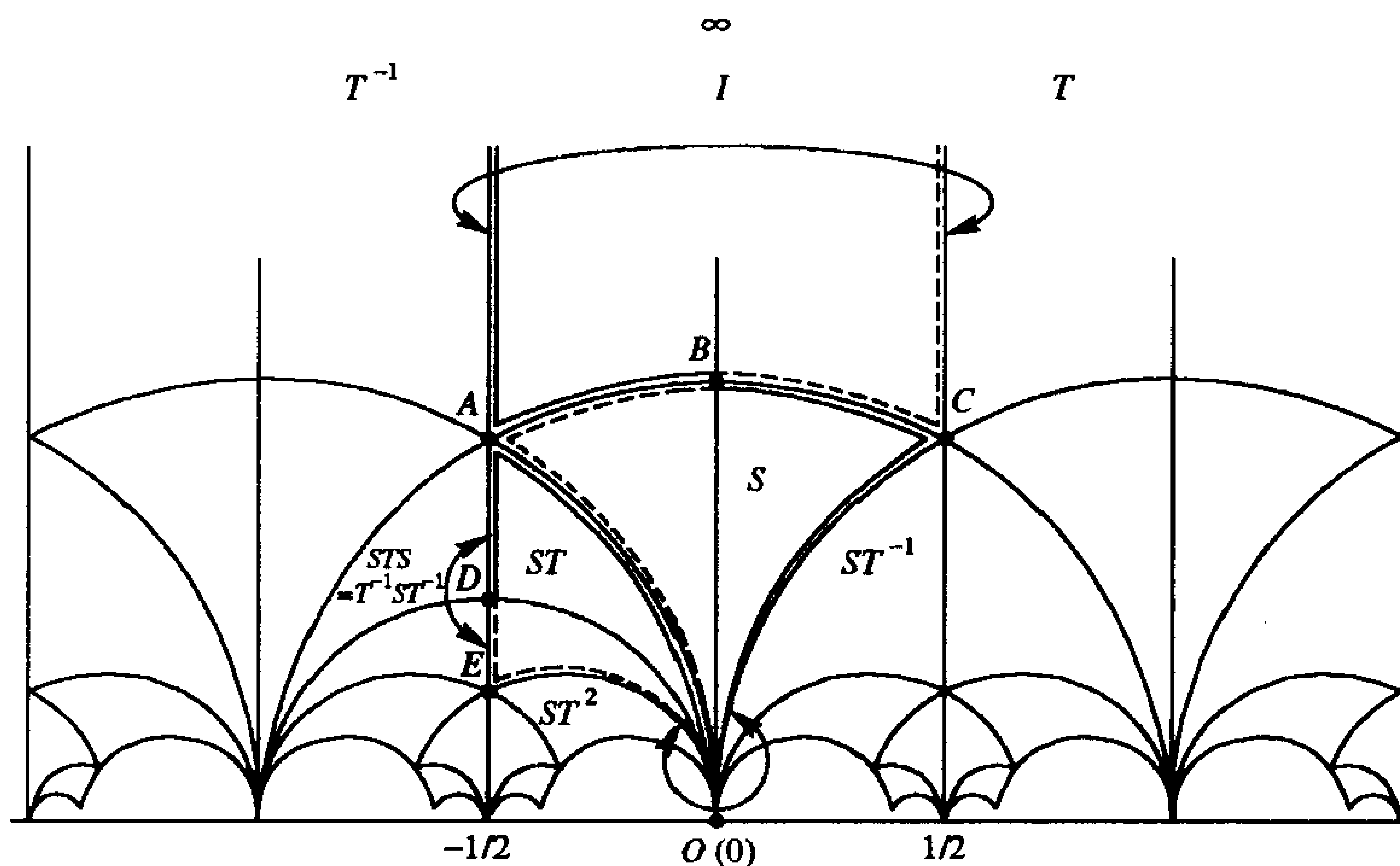


图 14.1　$\Gamma_0(2)=\Gamma_1(2)$ 的基本区域

再来找边界替换，即把与基本区域相邻的模三角形变为基本区域内的模三角形的模变换. 利用图 14.1 可得

与基本区域相邻的模三角形	边界替换	基本区域中的模三角形
$T\mathscr{F}^*$	T^{-1}	$\mathscr{F}^*$
$T^{-1}\mathscr{F}^*$	T	$\mathscr{F}^*$
$STS\mathscr{F}^*$	$(ST)S(ST)^{-1}$	$ST\mathscr{F}^*$
$ST^2\mathscr{F}^*$	$(ST^2S^{-1})^{-1}$	$S\mathscr{F}^*$
$ST^{-1}\mathscr{F}^*$	ST^2S^{-1}	$ST\mathscr{F}^*$

容易看出，这些边界替换实际上就是相应的稳定子群的生成元(为什么)，由此，就得到了所讨论的模群的生成元：

$$\overline{\Gamma}_0(2)=\overline{\Gamma}_1(2)=\{T,ST^2S,(ST)S(ST)^{-1}\}=\{T,ST^2S^{-1}\},$$

$$\Gamma_0(2)=\Gamma_1(2)=\{-I,T,ST^2S^{-1}\},$$

这里用到了$(ST)S(ST)^{-1}=ST^2S^{-1}T$.

(B) $\Gamma(2)$，它是Γ的正规子群.

利用$\overline{\Gamma}_0(2)=\overline{\Gamma}(2)(I\cup T)$，由(A)得：

右陪集分解

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}&=\overline{\Gamma}(2)(I\cup T)(I\cup S\cup ST)\\&=\overline{\Gamma}(2)((I\cup T)\cup(S\cup ST)\cup(TS\cup TST)).\end{aligned}$$

基本区域(见图 14.2)

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}(2))&=(I\cup T)\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}_0(2))\\&=(I\cup T)(I\cup S\cup ST)\mathscr{F}^*\\&=\mathscr{F}^*\cup T\mathscr{F}^*\cup S\mathscr{F}^*\cup ST\mathscr{F}^*\\&\quad\cup TS\mathscr{F}^*\cup TST\mathscr{F}^*.\end{aligned}$$

先找虚线∞I(这里的I是图中的点)，DE,OE,GF和JF，即不属于基本区域的边界在基本区域上的$\Gamma(2)$的等价边界. 显然有$T^2(\infty A)=\infty I$，$T^2\in\Gamma(2)$；以及(具体推导留给读者)

$$DE=\sigma_2(GC),\ GF=\sigma_2(DA),$$

$$OE=\sigma_2(OC),\ JF=T\sigma_2T^{-1}(JI),$$

$$\sigma_3=T\sigma_2T^{-1}=TST^2(TS)^{-1}=\begin{bmatrix}-1&2\\-2&3\end{bmatrix}\in\Gamma(2).$$

由此看出，(i) 点E和C；A,I和F分别是$\Gamma(2)$等价的，所以**没有三阶椭圆点**，$\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}(2))=0$；(ii) 点$D$和$G$是$\Gamma(2)$等价的，所以**没有二阶椭圆点**，$\mathscr{E}_i(\overline{\Gamma}(2))=0$；(iii) 点$\infty$，0 和 1 是$\Gamma(2)$在基本区域上的

尖点(**抛物点**)，$\mathscr{E}_{\infty}(\overline{\Gamma}(2))=3$，尖点$\infty=I(\infty)=T(\infty)$，宽度 $f=2$，稳定子群是$\{T^2\}$；尖点 $0=S(\infty)=ST(\infty)$，宽度 $f=2$，稳定子群是$\{ST^2S^{-1}\}$；尖点 $1=TS(\infty)=TST(\infty)$，宽度 $f=2$，稳定子群是$\{TST^2(TS)^{-1}\}$. 所讨论的模群的生成元是(注意$(TS)T^2(TS)^{-1}=-T^{-2}(ST^2S^{-1})^{-1}$)：

$$\overline{\Gamma}(2)=\{T^2,ST^2S^{-1},TST^2(TS)^{-1}\}=\{T^2,ST^2S^{-1}\},$$

$$\Gamma(2)=\{-I,T^2,ST^2S^{-1}\}.$$

边界替换　请读者参看图 14.2 自己找出与基本区域相邻的模三角形，及对应的边界替换，它们是：

$$T^2,\ T^{-2},\ ST^2S^{-1},\ TST^2S^{-1},\ (ST^2S^{-1})^{-1},$$

$$(TS)T^2(TS)^{-1},\ ((TS)T^2(TS)^{-1})^{-1}.$$

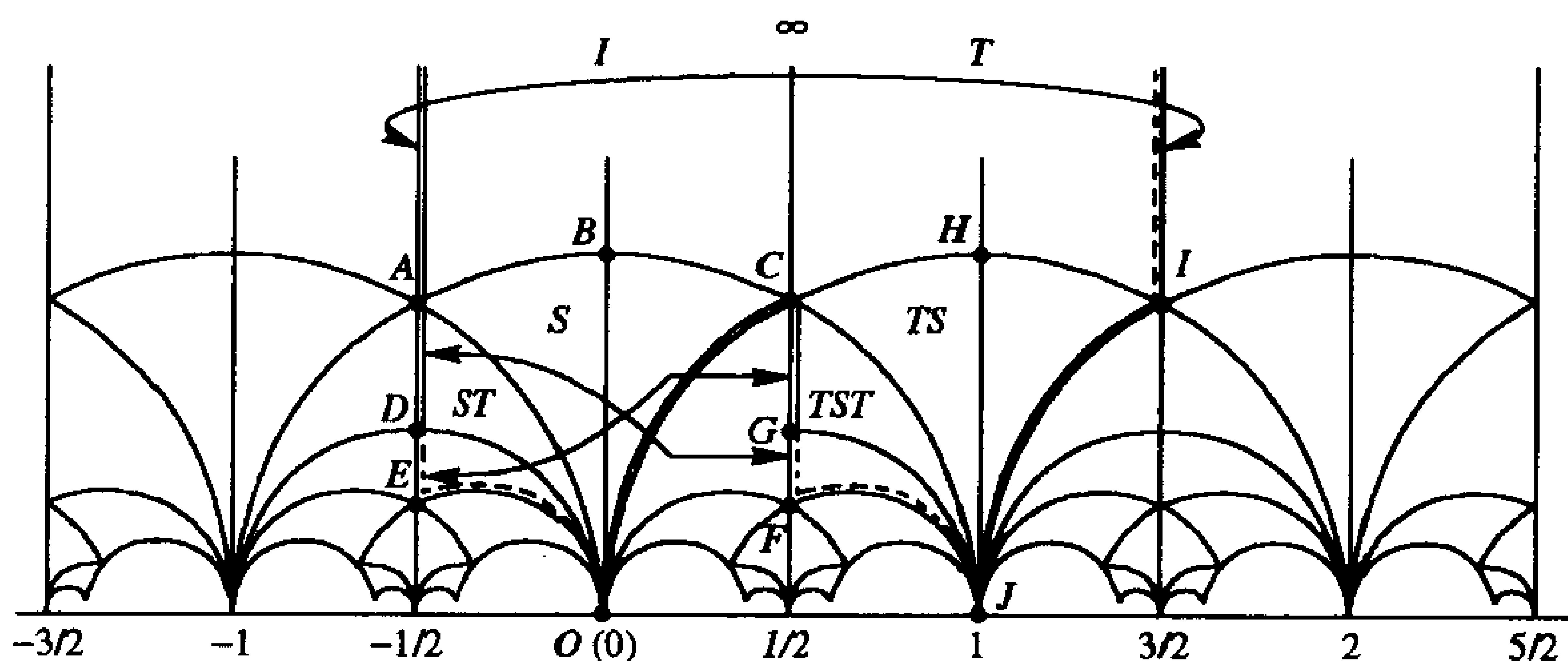


图 14.2 Γ(2)的基本区域

(C) Γ_θ.

由 $\overline{\Gamma}_\theta=\overline{\Gamma}(2)(I\cup S)$可得右陪集分解

$$\overline{\Gamma}=\overline{\Gamma}_\theta(I\cup T\cup TS).$$

基本区域(见图 14.3)

$$\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}_\theta)=\mathscr{F}^*\cup T\mathscr{F}^*\cup TS\mathscr{F}^*.$$

先找虚线∞I，BC 和 CJ，即不属于基本区域的边界在基本区域上的 Γ_θ 的等价边界. 显然有 $T^2(\infty A)=\infty I$，$T^2\in\Gamma_\theta$；$S(AB)=BC$，$S\in\Gamma_\theta$；以及 $CJ=TSTST^{-1}(IJ)=S^{-1}T^{-2}(IJ)$，$S^{-1}T^{-2}\in\Gamma_\theta$. 所以，**没有三阶椭圆点**，$\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}_\theta)=0$；二阶椭圆点是 i，稳定子群是$\{S\}$，$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}_\theta)=1$；尖点(抛物点)是$\infty$和 1，$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_\theta)=2$，尖点$\infty$的宽度 $f=2$，稳定子

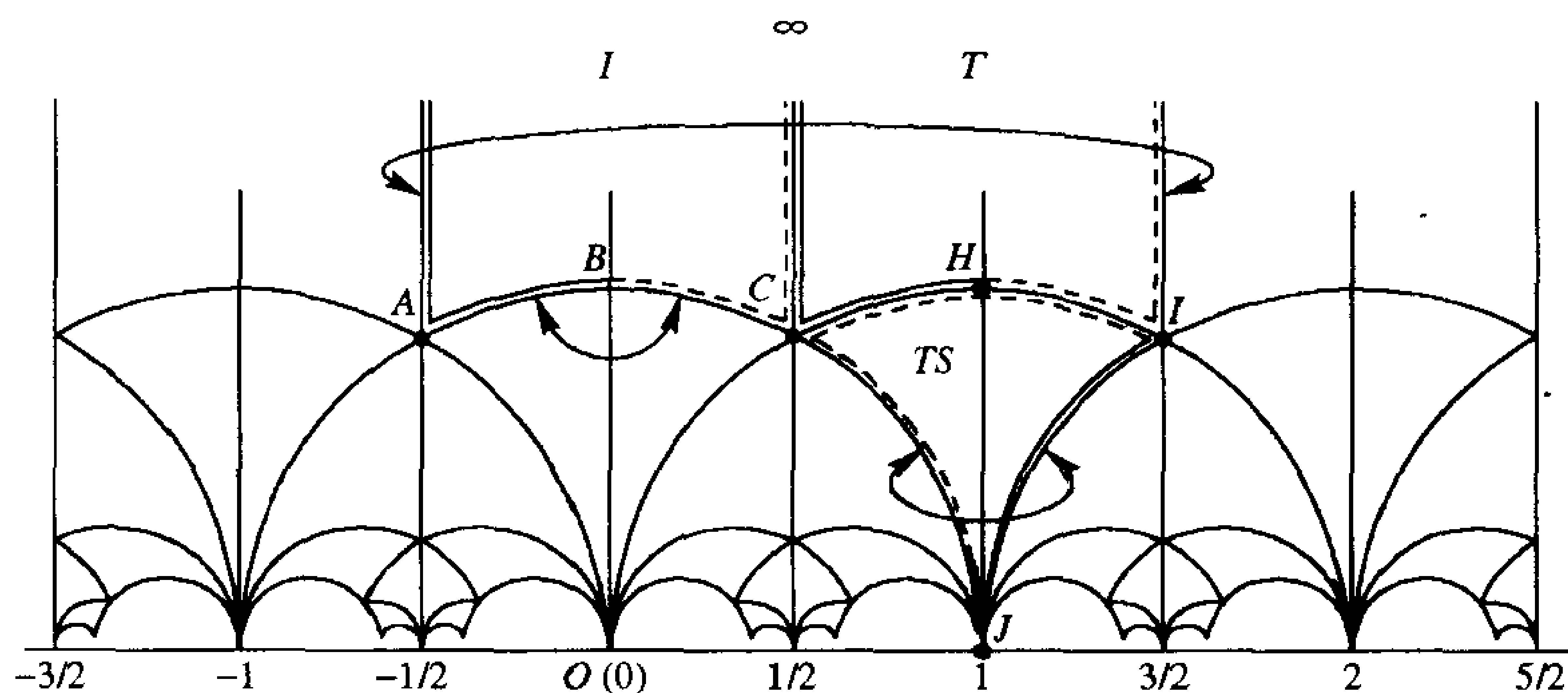


图 14.3 Γ_θ 的基本区域

群是$\{T^2\}$；尖点 1 的宽度 $f=1$，稳定子群$\{T^2S\}$. 所讨论的模群的生成元是：

$$\Gamma_\theta = \{S, ST^2\} = \{S, T^2\}, \quad \overline{\Gamma}_\theta = \{S, T^2\}/\{\pm I\}.$$

请读者自己找出与基本区域相邻的模三角形及对应的边界替换.

例 14.2 讨论 $\Gamma_0(3)$，$\Gamma_1(3)$，$\Gamma(3)$的情形.

(A) $\Gamma_0(3)=\Gamma_1(3)(I\cup -I)$，$\overline{\Gamma}_0(3)=\overline{\Gamma}_1(3)=\Gamma_1(3)$.

右陪集分解

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma} &= \overline{\Gamma}_0(3)(I \cup ST^{-1} \cup S \cup ST) \\ &= \overline{\Gamma}_1(3)(I \cup ST^{-1} \cup S \cup ST).\end{aligned}$$

基本区域(见图 14.4)

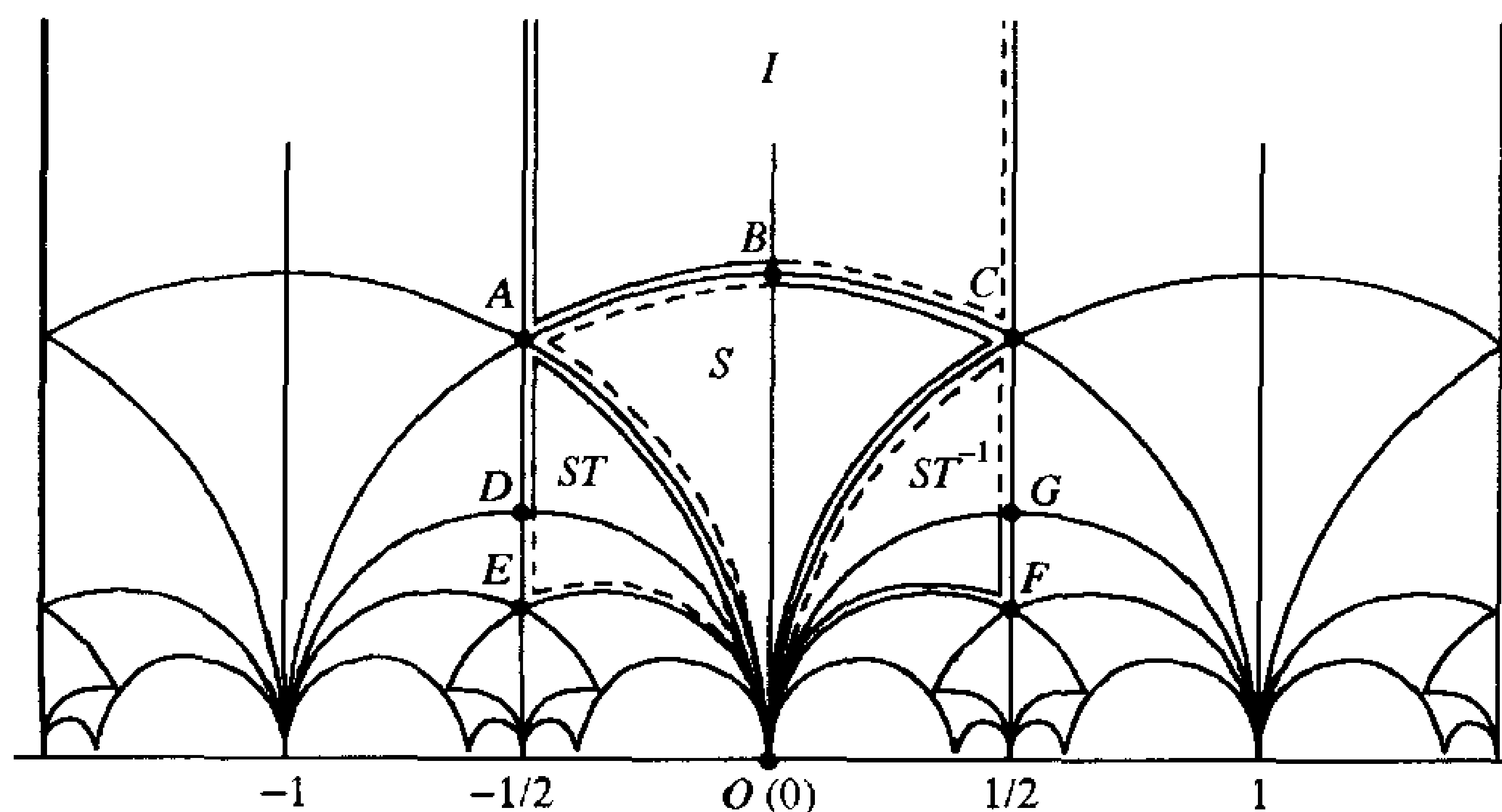


图 14.4 $\Gamma_0(3)$，$\Gamma_1(3)$的基本区域

$$\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}_0(3)) = \mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}_1(3))$$
$$= \mathscr{F}^* \cup ST^{-1}\mathscr{F}^* \cup S\mathscr{F}^* \cup ST\mathscr{F}^*.$$

二阶椭圆点

$$\mathscr{E}_i(\overline{\Gamma}_0(3)) = \mathscr{E}_i(\overline{\Gamma}_1(3)) = 0.$$

三阶椭圆点

$$ST^{-1}(\rho) = (\rho + 2)/3, \quad \mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}_0(3)) = \mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}_1(3)) = 1.$$

稳定子群是

$$\{(ST^{-1})(-ST)(ST^{-1})^{-1}\} = \{TST^3S^{-1}\}.$$

尖点(抛物点)是∞和 0,

$$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_0(3)) = \mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_1(3)) = 2.$$

尖点∞的宽度 $f=1$,稳定子群是$\{T\}$;尖点 0 的宽度 $f=3$,稳定子群是$\{ST^3S^{-1}\}$.

生成元

$$\overline{\Gamma}_0(3) = \overline{\Gamma}_1(3) = \Gamma_1(3) = \{T, ST^3S^{-1}\},$$
$$\Gamma_0(3) = \{-I, T, ST^3S^{-1}\}.$$

请读者自己找出与基本区域相邻的模三角形及对应的边界替换.

(B) $\Gamma(3)=\overline{\Gamma}(3)$是正规子群.

由 $\overline{\Gamma}_1(3)=\overline{\Gamma}(3)(T^{-1}\cup I\cup T)$可得右陪集分解

$$\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}(3)(T^{-1} \cup I \cup T)(I \cup ST^{-1} \cup S \cup ST)$$
$$= \overline{\Gamma}(3)\{(T^{-1} \cup I \cup T) \cup (T^{-1}ST^{-1} \cup T^{-1}S \cup T^{-1}ST)$$
$$\cup (ST^{-1} \cup S \cup ST) \cup (TST^{-1} \cup TS \cup TST)\}.$$

基本区域(见图 14.5)

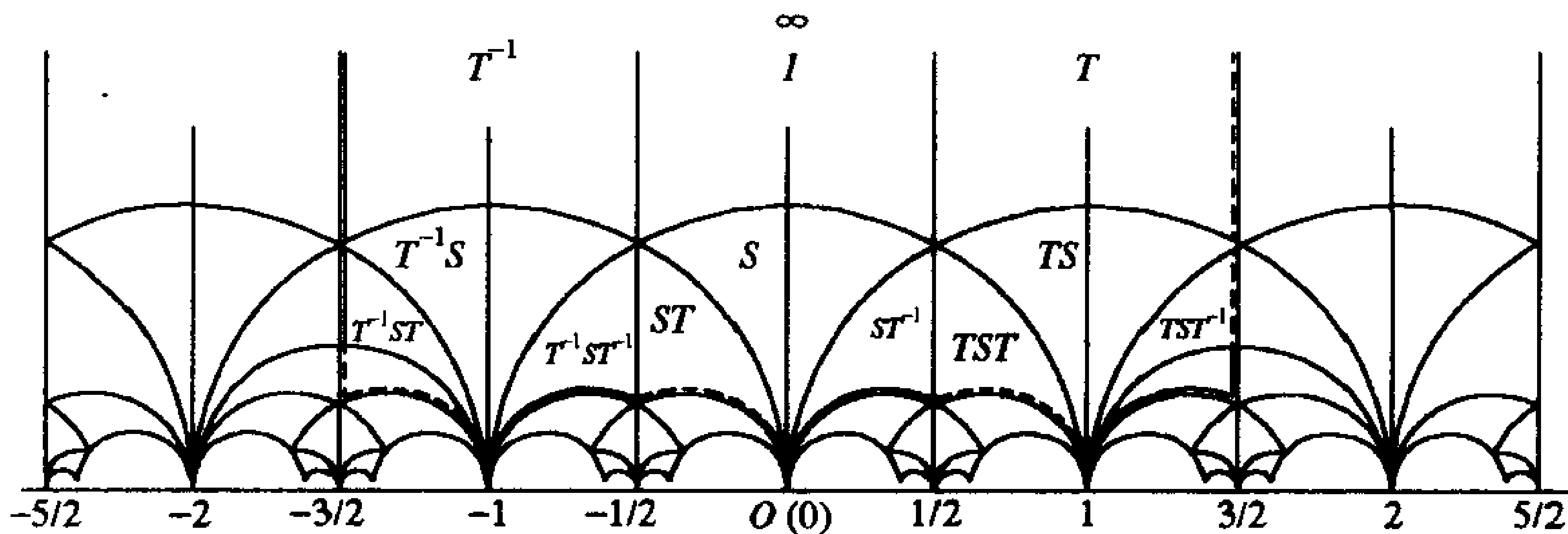


图 14.5　$\Gamma(3)$的基本区域

$$\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}(3)) = (T^{-1} \cup I \cup T)\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}_1(3)).$$

二阶椭圆点 $\mathscr{E}_i(\overline{\Gamma}(3))=0.$

三阶椭圆点 $\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}(3))=0.$

尖点(抛物点)是$\infty,0,1,-1$,宽度 $f=3$,$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}(3))=4$. 尖点$\infty$的稳定子群是$\{T^3\}$,尖点 0 的稳定子群是$\{ST^3S^{-1}\}$,尖点 1 的稳定子群是$\{(TS)T^3(TS)^{-1}\}$, 尖点$-1$的稳定子群是

$$\{(T^{-1}S)T^3(T^{-1}S)^{-1}\}.$$

生成元

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}(3) &= \Gamma(3)\\ &= \{T^3, ST^3S^{-1}, (TS)T^3(TS)^{-1}, (T^{-1}S)T^3(T^{-1}S)^{-1}\}.\end{aligned}$$

请读者自己找出与基本区域相邻的模三角形及对应的边界替换.

例 14.3 讨论 $\Gamma_0(4),\Gamma_1(4),\Gamma(4)$的情形.

(A) $\Gamma_0(4)=\Gamma_1(4)(I\cup -I)$, $\overline{\Gamma}_0(4)=\overline{\Gamma}_1(4)=\Gamma_1(4)$.

右陪集分解

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma} &= \overline{\Gamma}_0(4)(I \cup (ST^{-1} \cup S \cup ST \cup ST^2) \cup (ST^2S^{-1}))\\ &= \overline{\Gamma}_1(4)(I \cup (ST^{-1} \cup S \cup ST \cup ST^2) \cup (ST^2S^{-1})).\end{aligned}$$

基本区域(见图 14.6)

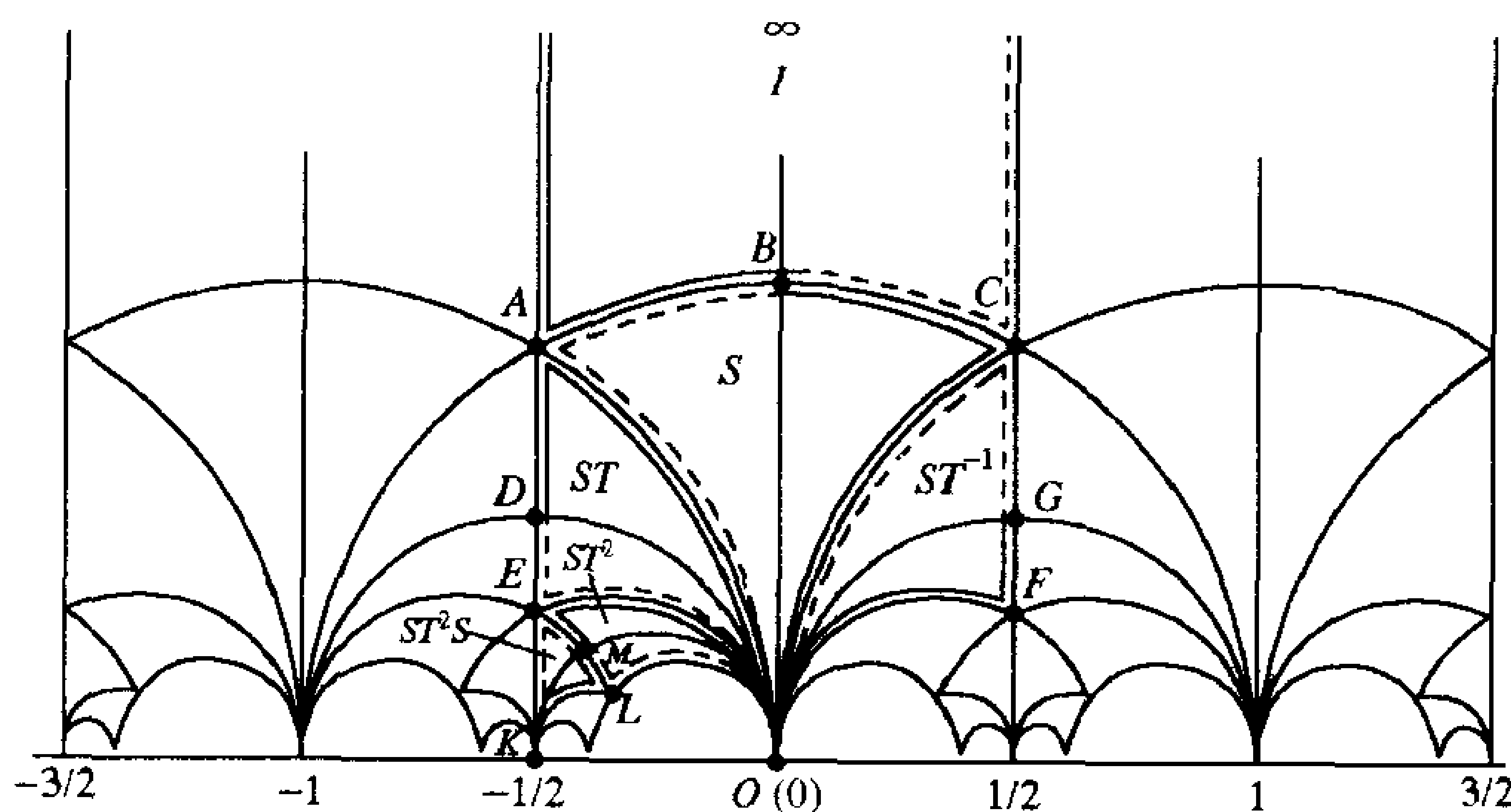


图 14.6 $\Gamma_0(4),\Gamma_1(4)$的基本区域

$$\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}_0(4)) = \mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}_1(4))$$

$$= \mathscr{F}^* \cup ST^{-1}\mathscr{F}^* \cup S\mathscr{F}^* \cup ST\mathscr{F}^*$$
$$\cup\, ST^2\mathscr{F}^* \cup ST^2S^{-1}\mathscr{F}^*.$$

二阶椭圆点

$$\mathscr{E}_i(\overline{\Gamma}_0(4)) = \mathscr{E}_i(\overline{\Gamma}_1(4)) = 0.$$

三阶椭圆点

$$\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}_0(4)) = \mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}_1(4)) = 0.$$

尖点(抛物点)是∞,0,$-1/2$,$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_0(4))=\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_1(4))=3$. 尖点$\infty$的宽度 $f=1$,稳定子群是$\{T\}$,尖点 0 的宽度 $f=4$,稳定子群是$\{ST^4S^{-1}\}$,尖点$-1/2$ 的宽度 $f=1$,稳定子群是

$$\{(ST^2S^{-1})T(ST^2S^{-1})^{-1}\}.$$

因为

$$(ST^2S^{-1})T(ST^2S^{-1})^{-1} \notin \Gamma_1(4),$$
$$(ST^2S^{-1})(-T)(ST^2S^{-1})^{-1} \in \Gamma_1(4),$$

所以,$-1/2$ **是 $\Gamma_1(4)$的非正则尖点**,在 $\Gamma_1(4)$中稳定子群是

$$\alpha_k = (ST^2S^{-1})(-T)^k(ST^2S^{-1})^{-1}$$
$$= (-1)^k\begin{bmatrix} 2k+1 & k \\ -4k & -2k+1 \end{bmatrix} \in \Gamma_1(4), \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{14.1}$$

生成元

$$\overline{\Gamma}_0(4) = \overline{\Gamma}_1(4) = \Gamma_1(4) = \{T, ST^4S^{-1}\},$$
$$\Gamma_0(4) = \{-I, T, ST^4S^{-1}\},$$

这里用到　$(ST^2S^{-1})T(ST^2S^{-1})^{-1} = -T(ST^4S^{-1})^{-1}$.

请读者自己找出与基本区域相邻的模三角形及对应的边界替换.

(B) $\Gamma(4)=\overline{\Gamma}(4)$是正规子群.

由 $\overline{\Gamma}_1(4)=\overline{\Gamma}(4)(T^{-1}\cup I\cup T\cup T^2)$可得右陪集分解

$$\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}(4)(T^{-1} \cup I \cup T \cup T^2)(I \cup (ST^{-1} \cup S \cup ST$$
$$\cup\, ST^2) \cup (ST^2S))$$
$$= \overline{\Gamma}(4)\{(T^{-1} \cup I \cup T \cup T^2)$$
$$\cup\, (T^{-1}ST^{-1} \cup T^{-1}S \cup T^{-1}ST \cup T^{-1}ST^2)$$

$$\cup (ST^{-1} \cup S \cup ST \cup ST^2)$$
$$\cup (TST^{-1} \cup TS \cup TST \cup TST^2)$$
$$\cup (T^2ST^{-1} \cup T^2S \cup T^2ST \cup T^2ST^2)$$
$$\cup (T^{-1}ST^2S \cup ST^2S \cup TST^2S \cup T^2ST^2S)\}.$$

基本区域(见图 14.7)

$$\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}(4)) = (T^{-1} \cup I \cup T \cup T^2)\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}_1(4)).$$

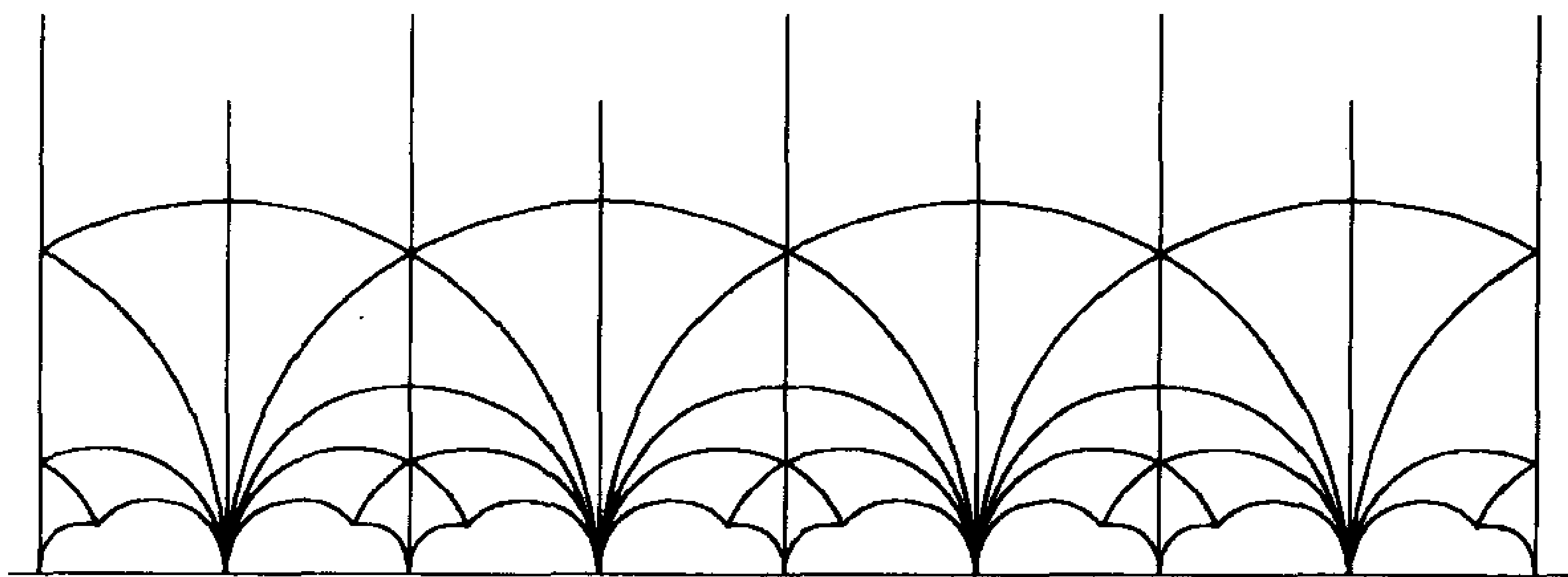


图 14.7 Γ(4)的基本区域

二阶椭圆点 $\mathscr{E}_i(\overline{\Gamma}(4))=0.$

三阶椭圆点 $\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}(4))=0.$

尖点(抛物点)是$\infty,-1,0,1,2,-1/2$,宽度

$$f=4, \quad \mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}(4))=6.$$

尖点∞的稳定子群是$\{T^4\}$,尖点-1的稳定子群是$\{(T^{-1}S)T^4(T^{-1}S)^{-1}\}$,尖点 0 的稳定子群是$\{ST^4S^{-1}\}$,尖点 1 的稳定子群是$\{(TS)T^4(TS)^{-1}\}$,尖点 2 的稳定子群是$\{(T^2S)T^4(T^2S)^{-1}\}$,以及尖点$-1/2$的稳定子群是$\{(ST^2S)T^4(ST^2S)^{-1}\}$. 这里要指出的是:产生的以下四个尖点是$\overline{\Gamma}(4)$等价的:

$$T^{-1}ST^2S(\mathrm{i}\infty) = -3/2, \quad ST^2S(\mathrm{i}\infty) = -1/2,$$
$$TST^2S(\mathrm{i}\infty) = 1/2, \quad T^2ST^2S(\mathrm{i}\infty) = 3/2.$$

我们来给出直接证明:所有尖点$l-1/2,l\in\mathbf{Z}$,是$\overline{\Gamma}(4)$等价的. 因为对给定的l,取k满足

$$(2l-1)k + l \equiv 0 \pmod 4,$$

即有$\alpha_k T^{-l}\in\overline{\Gamma}(4)$,且把$l-1/2$变到$-1/2$,这里的$\alpha_k$由式(14.1)给出.

生成元

$$\overline{\Gamma}(4)=\Gamma(4)=\{T^4,T^{-1}(ST^4S^{-1})T,ST^4S^{-1},T(ST^4S^{-1})T^{-1},$$
$$T^2(ST^4S^{-1})T^{-2},(ST^2)(ST^4S^{-1})(ST^2)^{-1}\}.$$

请读者自己找出与基本区域相邻的模三角形及对应的边界替换.

例 14.4　讨论 $\Gamma_0(5),\Gamma_1(5),\Gamma(5)$的情形.

$$\Gamma_0(5)=\Gamma_1(5)(I\cup -I\cup\rho(2)\cup\rho(-2))$$
$$=\Gamma_1(5)\{(I\cup -I)(I\cup\sigma_4)\},$$

其中 $\rho(d)$根据式(11.23)的第二式适当选取,及

$$\sigma_4=\begin{bmatrix}-2&-1\\5&2\end{bmatrix}=(ST^2)S(ST^2)^{-1},\quad \sigma_4^{-1}=-\sigma_4.$$

$$\overline{\Gamma}_0(5)=\overline{\Gamma}_1(5)(I\cup\sigma_4),$$
$$\Gamma_1(5)=\Gamma(5)(T^{-2}\cup T^{-1}\cup I\cup T\cup T^2).$$
$$\Gamma_1(5)=\overline{\Gamma}_1(5),\quad \Gamma(5)=\overline{\Gamma}(5).$$

这是第一次出现 $\overline{\Gamma}_0(5)\neq\overline{\Gamma}_1(5)$.

(A) $\overline{\Gamma}_0(5)$.

右陪集分解

$$\overline{\Gamma}=\overline{\Gamma}_0(5)(I\cup(ST^{-2}\cup ST^{-1}\cup S\cup ST\cup ST^2)).$$

基本区域(见图 14.8)

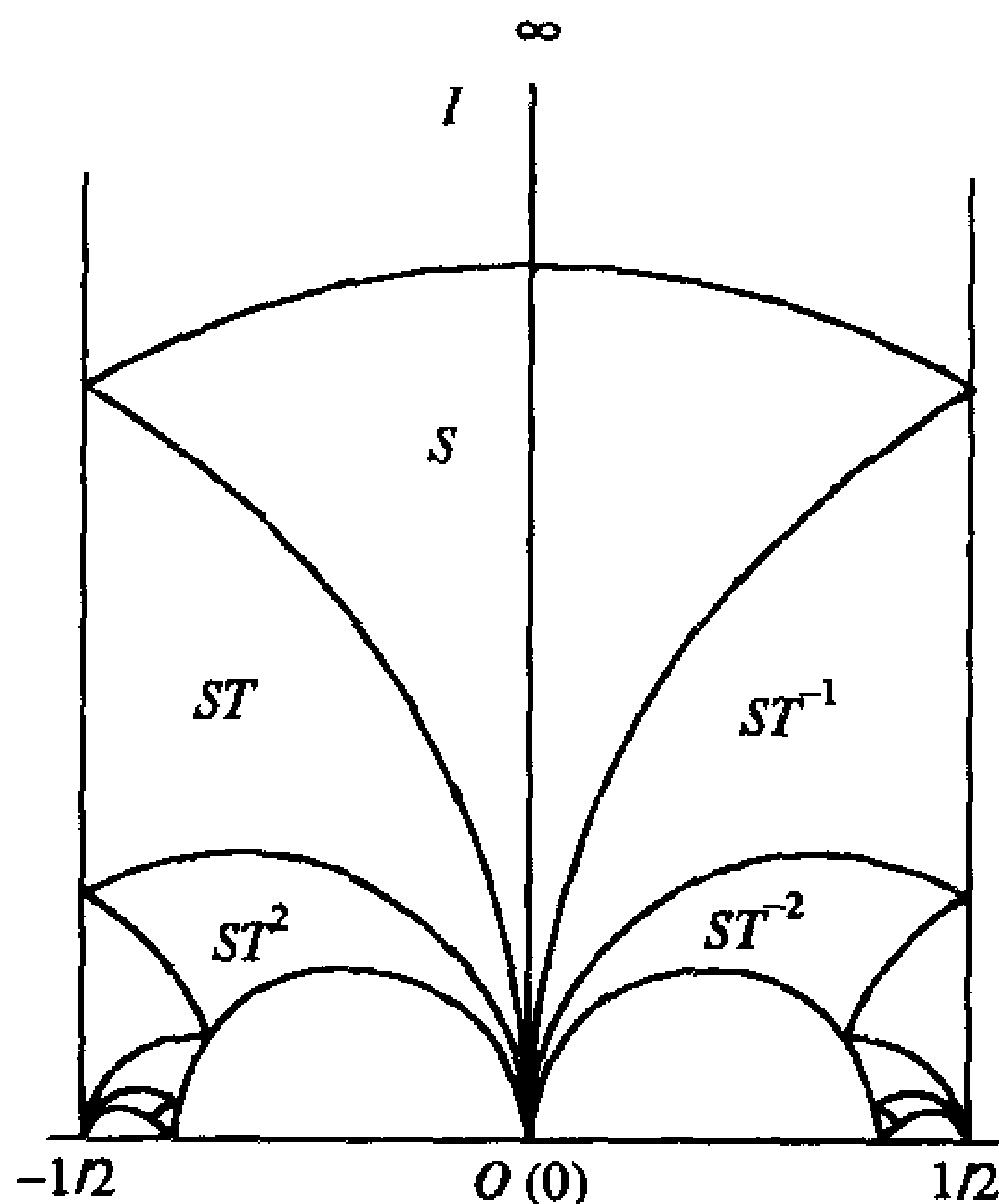


图 14.8　$\Gamma_0(5)$的基本区域

$$\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}_0(5)) = \mathscr{F}^* \cup ST^{-2}\mathscr{F}^* \cup ST^{-1}\mathscr{F}^* \cup S\mathscr{F}^* \cup ST\mathscr{F}^* \cup ST^2\mathscr{F}^*.$$

二阶椭圆点 (i−2)/5 和(i+2)/5，$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}_0(5))=2$. 因为，仅当 $l\equiv \pm 2 (\mathrm{mod}\ 5)$ 时，

$$(ST^l)S(ST^l)^{-1} = \begin{bmatrix} -l & -1 \\ l^2+1 & l \end{bmatrix} \in \overline{\Gamma}_0(5),$$

所以，二阶椭圆点 $ST^2(\mathrm{i})=(\mathrm{i}-2)/5$，稳定子群是

$$\{(ST^2)S(ST^2)^{-1}\};$$

及二阶椭圆点 $ST^{-2}(\mathrm{i})=(\mathrm{i}+2)/5$，稳定子群是

$$\{(ST^{-2})S(ST^{-2})^{-1}\}.$$

三阶椭圆点　$\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}_0(5))=0$.

尖点(抛物点)　∞和 0，$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_0(5))=2$. 尖点∞的宽度 $f=1$，稳定子群是$\{T\}$；尖点 0 的宽度 $f=5$，稳定子群是$\{ST^5S^{-1}\}$.

生成元

$$\overline{\Gamma}_0(5) = \{T, ST^5S^{-1}, (ST^2)S(ST^2)^{-1}, (ST^{-2})S(ST^{-2})^{-1}\},$$

$$\Gamma_0(5) = \{-I, T, ST^5S^{-1}, (ST^2)S(ST^2)^{-1}, (ST^{-2})S(ST^{-2})^{-1}\}.$$

请读者自己找出与基本区域相邻的模三角形及对应的边界替换.

(B) $\overline{\Gamma}_1(5)$.

右陪集分解

$$\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}_0(5)(I \cup (ST^{-2} \cup ST^{-1} \cup S \cup ST \cup ST^2))$$
$$= \overline{\Gamma}_1(5)(I \cup \sigma_4)(I \cup (ST^{-2} \cup ST^{-1} \cup S \cup ST \cup ST^2)).$$

二阶椭圆点　$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}(\overline{\Gamma}_1(5))=0$.

三阶椭圆点　$\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}_1(5))=0$.

抛物点(尖点)　∞，0，−2/5 和 −1/2，$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_1(5))=4$. 尖点∞的宽度 $f=1$，稳定子群是$\{T\}$；尖点 0 的宽度 $f=5$，稳定子群是$\{ST^5S^{-1}\}$，尖点 −2/5 的宽度 $f=1$，稳定子群是$\{\sigma_4T\sigma_4^{-1}\}$；尖点 −1/2 的宽度 $f=5$，稳定子群是$\{(ST^2S)T^5(ST^2S)^{-1}\}$.

生成元

$$\overline{\Gamma}_1(5) = \Gamma_1(5) = \{T, ST^5S^{-1}, \rho(2)T\rho(2)^{-1}, (ST^2S)T^5(ST^2S)^{-1}\}.$$

基本区域. 由上面的右陪集分解可得如下的基本区域:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}_1(5)) &= \mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}_0(5)) \cup \sigma_4(\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}_0(5))) \\ &= (I \cup (ST^{-2} \cup ST^{-1} \cup S \cup ST \cup ST^2))\mathscr{F}^* \\ &\quad \cup (ST^2ST^{-4} \cup ST^2ST^{-3} \cup ST^2ST^{-2} \cup ST^2ST^{-1} \\ &\quad \cup ST^2S)\mathscr{F}^* \cup (ST^2ST^{-2}S)\mathscr{F}^*.\end{aligned}$$

它的排列不对称,但可作如下调整(即某些模三角形用另外的 $\overline{\Gamma}_1(5)$ 等价的来替代): ST^2ST^{-3}是 $\overline{\Gamma}_1(5)$等价于 $ST^{-2}ST$,及 ST^2ST^{-4}是 $\overline{\Gamma}_1(5)$等价于 $ST^{-2}S$. 这样,可取较为对称的基本区域(见图 14.9)

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^*(\overline{\Gamma}_1(5)) &= (I \cup (ST^{-2} \cup ST^{-1} \cup S \cup ST \cup ST^2))\mathscr{F}^* \\ &\quad \cup (ST^{-2}S \cup ST^{-2}ST \cup ST^2ST^{-2} \cup ST^2ST^{-1} \\ &\quad \cup ST^2S)\mathscr{F}^* \cup (ST^2ST^{-2}S)\mathscr{F}^*.\end{aligned}$$

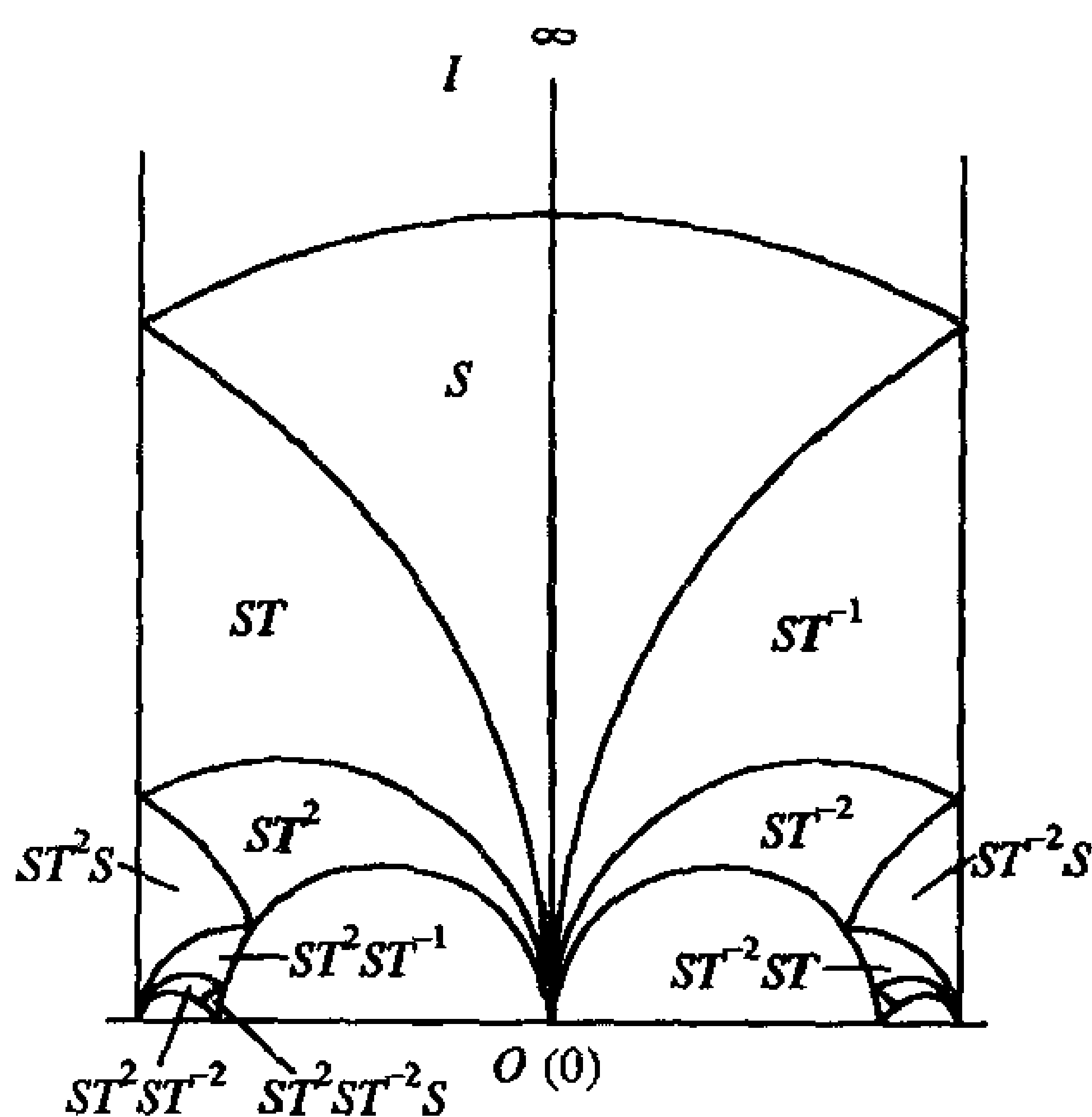


图 14.9　$\Gamma_1(5)$的基本区域

这时尖点 $-1/2$ 分为两个等价的: $-1/2$ 和 $1/2$. 由此可有相应的右陪集分解.

请读者自己找出与基本区域相邻的模三角形及对应的边界替换.

(C) $\Gamma(5)=\overline{\Gamma}(5)$是正规子群.

利用

$$\overline{\Gamma}_1(5) = \overline{\Gamma}(5)(T^{-2} \cup T^{-1} \cup I \cup T \cup T^2)$$

及(B)中的结果就可相应得到 $\overline{\Gamma}(5)$ 的右陪集分解及基本区域(留给读者).

二阶椭圆点　$\mathscr{E}_i(\overline{\Gamma}(5))=0$.

三阶椭圆点　$\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}(5))=0$.

尖点(抛物点)　$\infty;0,\pm1,\pm2;\pm1/2,\pm3/2,-5/2;-2/5$,宽度 $f=5$,

$$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}(5)) = 12.$$

它们的稳定子群请读者自己写出.

生成元

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}(5) = \Gamma(5) = \{&T^5,(T^{-2}S)T^5(T^2S)^{-1},(T^{-1}S)T^5(T^{-1}S)^{-1},\\ &ST^5S^{-1},(TS)T^5(TS)^{-1},(T^2S)T^5(T^2S)^{-1},\\ &(T^{-2}ST^2S)T^5(T^{-2}ST^2S)^{-1},\\ &(T^{-1}ST^2S)T^5(T^{-1}ST^2S)^{-1},\\ &(ST^2S)T^5(ST^2S)^{-1},(TST^2S)T^5(TST^2S)^{-1},\\ &(T^2ST^2S)T^5(T^2ST^2S)^{-1},\\ &(ST^2ST^{-2}S)T^5(ST^2ST^{-2}S)^{-1}\}.\end{aligned}$$

请读者自己尽可能化简生成元,并找出与基本区域相邻的模三角形及对应的边界替换.

问　题

1. 设 M,N 是正整数. 证明:由 $\mathbf{Z}_{MN}$ 到 $\mathbf{Z}_N$ 的自然同态映射:$x \bmod MN \mapsto x \bmod N$,诱导出的 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_{MN})$ 到 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_N)$,及 $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_{MN})$ 到 $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_N)$ 的自然同态映射都是满射.

2. 设 F_q 是有 q 个元素的有限域. 求 $\mathrm{GL}_2(F_q)$ 及 $\mathrm{SL}_2(F_q)$ 的阶.

3. 设 p 是素数,e 是正整数. (i) 求 $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_{p^e})$ 到 $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ 的自然同态映射的核;(ii) 求群 $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_{p^e})$ 的阶;(iii) 求 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_{p^e})$ 的阶;(iv) 设有素因子分解式 $N=p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$. 证明:$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_N)$ 和直积 $\mathrm{GL}(\mathbf{Z}_{p_1^{e_1}})\times\cdots\times\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_{p_r^{e_r}})$ 同构,以及 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_N)$ 和直积 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_{p_1^{e_1}})\times\cdots\times\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_{p_r^{e_r}})$ 同构;(v) 求 $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_N)$ 及 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_N)$ 的阶. (本题是求

$SL_2(\mathbf{Z}_N)$的又一证法.)

4. 证明:(i) $\Gamma(2)$和$\Gamma_0(4)$同构;(ii) $\Gamma(N)$和$\Gamma_0(N^2)$中的一个指数为$\varphi(N)$的子群同构.

5. (i) 证明定义 8.4 的注记(iii);(ii) 利用$\Gamma(2)$的基本区域来求$\Gamma_0(4)$的基本区域.

6. 求出Γ的所有 2 级同余子群,并找出它们的基本区域.

7. 求$\Gamma^0(2)$的生成元.

8. (i) 设p为素数,e为正整数. 那么,陪集分解

$$\Gamma = U\alpha_j\Gamma_0(p^e)$$

中的$\{\alpha_j\}$可取为

$$I,\ T^{-k}S^{-1},\quad k = 0,1,\cdots,p^e - 1,$$
$$ST^{-kp}S^{-1},\quad k = 1,2,\cdots,p^{e-1} - 1.$$

(ii) 利用(i)求$\Gamma_0(4)$的基本区域;

(iii) 利用(i)求$\Gamma_0(p)$的基本区域. 特别的,求出$\Gamma_0(3)$的基本区域.

9. 设Γ_1,Γ_2是Γ的子群,指数有限,$\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2$分别是它们的基本区域. 若$\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$,是否一定有$\Gamma_2\subset\Gamma_1$?

10. 直接证明三个尖点$\infty,0,-1$是$\Gamma(2)$不等价的.

11. 证明:(i) $\Gamma_0(p)$有两个尖点:$\infty,0$;(ii) $\Gamma_0(p^2)$有$p+1$个尖点:$\infty,0,1/(kp)$, $k=1,2,\cdots,p-1$.

12. 把§14 中没有证明之处都补出证明.

第五章　模函数的基本知识

从§7～§14 我们讨论了完全模群、模群特别是同余子群的有关知识，为讨论模函数作了必要的准备. 本章是介绍模函数的一般概念与基本性质（见§15 和§16），详细讨论了完全模群的模形式空间（见§17），并在§18 讨论了权为零的半纯模函数并给出了它的一个应用.

§15　模函数的一般概念与基本性质

本节将继续§5 的讨论，介绍模函数的一般概念与基本性质，所用的符号和术语与§5 相同. 虽然对模群或指数有限的模群也可引进这些概念和性质，但我们只讨论同余子群情形，有兴趣的读者可自己讨论. 为方便起见再把几个符号重述于下：设

$$\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R}), \tag{15.1}$$

我们记

$$j(z;\alpha) = cz + d. \tag{15.2}$$

再设 k 是给定的整数，我们把变换

$$f \mapsto f \circ [\alpha]_k: f \circ [\alpha]_k(z) = |\alpha|^{k/2} j(z;\alpha)^{-k} f(\alpha(z)) \tag{15.3}$$

称为是**权为 k 的 α 变换**，记作 $[\alpha]_k$（或 $\circ[\alpha]_k$）. 容易证明（留给读者）

性质 15.1　对任意实数 $l>0$，有

$$f \circ [\pm lI]_k = (\pm 1)^k f, \quad f \circ [\pm l\alpha]_k = (\pm 1)^k f \circ [\alpha]_k,$$

$$f \circ [B_{(l)}]_k(z) = l^{k/2} f(lz),$$

其中 $B_{(n)}$ 由式(11.38)给出，以及

$$(f_1 f_2) \circ [\alpha]_{k+h} = (f_1 \circ [\alpha]_k)(f_2 \circ [\alpha]_h).$$

性质 15.2　对任意的 $\alpha, \beta \in \mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R})$ 有

$$(f\circ[\alpha]_k)\circ[\beta]_k=f\circ[\alpha\beta]_k,$$

即权为 k 的 α 变换与权为 k 的 β 变换的乘积等于权为 k 的 α 与 β 的乘积的变换：

$$[\alpha]_k[\beta]_k=[\alpha\beta]_k.$$

因而，权为 k 的 α 变换的乘法满足结合律：即对任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in \mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R})$有

$$([\alpha]_k[\beta]_k)[\gamma]_k=[\alpha]_k([\beta]_k[\gamma]_k)=[\alpha]_k[\beta]_k[\gamma]_k=[\alpha\beta\gamma]_k,$$

即

$$\begin{aligned}(f\circ([\alpha]_k[\beta]_k))\circ[\gamma]_k&=(f\circ[\alpha]_k)\circ([\beta]_k[\gamma]_k)\\&=((f\circ[\alpha]_k)\circ[\beta]_k)\circ[\gamma]_k=f\circ[\alpha\beta\gamma]_k.\end{aligned}$$

证　设

$$\beta=\begin{bmatrix}s&t\\u&v\end{bmatrix}\in \mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R}),$$

我们有

$$\begin{aligned}j(z;\alpha\beta)&=(cs+ud)z+(ct+vd)\\&=\left\{c\left(\frac{sz+t}{uz+v}\right)+d\right\}(uz+v)\\&=j(\beta(z);\alpha)j(z;\beta).\end{aligned}\tag{15.4}$$

由此及式(15.3)得

$$\begin{aligned}f\circ[\alpha\beta]_k(z)&=|\alpha\beta|^{k/2}j(z;\alpha\beta)^{-k}f(\alpha\beta(z))\\&=|\beta|^{k/2}j(z;\beta)^{-k}|\alpha|^{k/2}j(\beta(z);\alpha)^{-k}f(\alpha(\beta(z)))\\&=(f\circ[\alpha]_k)\circ[\beta]_k(z),\end{aligned}$$

这就证明了第一个结论. 另一结论是显然的.

下面来给出一般模函数的定义.

定义 15.1　设同余子群 $\Gamma'\subseteq\Gamma$，k 是整数，以及 $f(z)$是 $\boldsymbol{H}$ 内的半纯函数. 若对任意的 $\alpha\in\Gamma'$，在权为 k 的 α 变换(即模变换 α)下保持不变：

$$f\circ[\alpha]_k=f,\quad \alpha\in\Gamma',\tag{15.5}$$

即

$$j(z;\alpha)^{-k}f(\alpha(z))=f(z),\quad z\in\boldsymbol{H},\ \alpha\in\Gamma',\tag{15.5'}$$

则称 f 是**同余子群 Γ' 的权为 k 的模函数**，$j(z;\alpha)$称为**自守因子**. Γ' 的

全体权为 k 的模函数组成的集合记作 $V_k(\Gamma')$.

显见,Γ'的权为 k 的模函数有以下简单性质(证明留给读者).

性质 15.3 对任意的同余子群 Γ'和任意整数 k,$0\in V_k(\Gamma')$;对任意的同余子群 Γ',常数属于 $V_0(\Gamma')$.

性质 15.4 当$-I\in\Gamma'$时,对奇数 k,仅有 $0\in V_k(\Gamma')$.

性质 15.5 若 $f_1\in V_k(\Gamma')$,$f_2\in V_h(\Gamma')$,则 $f_1f_2\in V_{k+h}(\Gamma')$.

性质 15.6 若同余子群 Γ'是由 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$ 生成,则 $f\in V_k(\Gamma')$,即式(15.5)成立的充要条件是

$$f\circ[\sigma_j]_k=f,\quad 1\leqslant j\leqslant r.$$

特别的,$f\in V_k(\Gamma)$的充要条件是

$$f\circ[T]_k=f,\quad f\circ[S]_k=f,\qquad(15.6)$$

即

$$f(z+1)=f(z),\quad z^{-k}f(-1/z)=f(z).\qquad(15.6')$$

由性质 15.6 及式(6.12)和定理 4.9 就分别推出 Dedekind η 函数和 $\tilde{\eta}(w)$满足

$$\eta^{24}\circ[\alpha]_{12}=\eta^{24},\quad\tilde{\eta}^{24}\circ[\alpha]_{12}=\tilde{\eta}^{24},\quad\alpha\in\Gamma,\qquad(15.7)$$

即

$$\eta^{24}\in V_{12}(\Gamma),\quad\tilde{\eta}^{24}\in V_{12}(\Gamma).\qquad(15.7')$$

性质 15.7 设 $\sigma\in GL_2^+(\boldsymbol{Q})$,$f\in V_k(\Gamma')$.那么,$g=f\circ[\sigma]_k$ 是同余子群 $\Gamma''=(\sigma^{-1}\Gamma'\sigma)\cap\Gamma$ 的权为 k 的模函数,即 $g=f\circ[\sigma]_k\in V_k(\Gamma'')$.特别的,当 $\sigma\in\Gamma$ 时,$\Gamma''=\sigma^{-1}\Gamma'\sigma$.

证 由性质 15.2 及 $f\in V_k(\Gamma')$知

$$\begin{aligned}g\circ[\beta]_k&=(f\circ[\sigma]_k)\circ[\beta]_k\\&=f\circ[\sigma]_k=g,\quad\beta\in\sigma^{-1}\Gamma'\sigma.\end{aligned}\qquad(15.8)$$

由定理 11.4 知 Γ''是同余子群,这就证明了所要的结论.

对于同余子群 Γ'的模函数,特别重要的是要知道它们在尖点处的性质,即要讨论它们在扩大的上半平面 $\boldsymbol{H}^*$ 上的性质,并依此来分类.对模函数来说在等价点处的性质,由所满足的关系式(15.5')来看,本质上是相同的,因此只要取一代表点来讨论.在§4～§6 讨论了完全模群 Γ 的模函数 $G_{2k}(z)$,$E_{2k}(z)$,$\Delta(z)$,$J(z)$,$\eta^{24}(z)$和 $\tilde{\eta}^{24}(z)$,对于完全模群 Γ 来说所有尖点都是等价的,所以讨论了它们在尖点

$i\infty$处的性质，不需要再考虑其他有限尖点. 但是一般同余子群 Γ' 的不等价尖点可以多于一个，对尖点 $i\infty$(及与其等价的有限尖点)可像通常一样讨论. 但是，如何来讨论与 $i\infty$不等价的有限尖点处的性质呢？容易看出下面的定义是合理的.

定义 15.2 设 $f\in V_k(\Gamma')$. (i) f 在尖点 $i\infty$处的性质就是当 $\mathrm{Im}z\to+\infty$时的性质，并约定 f **在尖点** $i\infty$(常写为∞)**处的值**

$$f(i\infty) = \lim_{\mathrm{Im}z\to+\infty} f(z); \tag{15.9}$$

对与 $i\infty$等价的有限尖点 $p_1=s_1/r_1,(s_1,r_1)=1,r_1\geqslant1$，则在尖点 p_1 处的性质就是在尖点 $i\infty$处的性质，并约定 f **在尖点** p_1 **处的值**

$$f(p_1) = f(i\infty). \tag{15.10}$$

(ii) 对与 $i\infty$不等价的有限尖点 $p_1=s_1/r_1,(s_1,r_1)=1,r_1\geqslant1$，任意取定一个

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} s_1 & u_1 \\ r_1 & v_1 \end{bmatrix} \in \Gamma, \tag{15.11}$$

使得 $\sigma_1(i\infty)=s_1/r_1$，并设 $g_1=f\circ[\sigma_1]_k$. f 在与 $i\infty$不等价的有限尖点 $p_1=s_1/r_1$ 处的性质就是 g_1 在尖点 $i\infty$处的性质，并约定 f 在尖点 p_1 处的值

$$f(p_1) = f(s_1/r_1) = g_1(i\infty) = \lim_{\mathrm{Im}z\to+\infty} g_1(z), \tag{15.12}$$

即

$$f(p_1) = f(s_1/r_1) = r_1^{-k} \lim_{\mathrm{Im}z\to+\infty} z^{-k} f(\sigma_1(z)). \tag{15.12$'$}$$

由性质 15.7 知 $g_1=f\circ[\sigma_1]_k$ 是同余子群 $\Gamma''=\sigma_1^{-1}\Gamma'\sigma_1$ 的权为 k 的模函数. 当有限尖点 $p_1=s_1/r_1,(s_1,r_1)=1,r_1\geqslant1$，与 $i\infty$等价时，可取到

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} s_1 & u_1 \\ r_1 & v_1 \end{bmatrix} \in \Gamma', \tag{15.13}$$

使得 $\sigma_1(i\infty)=s_1/r_1$. 这时 $f\circ[\sigma_1]_k=f$，由式(15.10)及式(15.5$'$)得到

$$f(p_1) = f(s_1/r_1) = f(i\infty) = r_1^{-k} \lim_{\mathrm{Im}z\to+\infty} z^{-k} f(\sigma_1(z)). \tag{15.14}$$

这一关系式使我们看出，不管与 $i\infty$是否等价，在有限尖点处的性质

的这两个定义是一致的. 对 f 在有限尖点 $p_1=s_1/r_1$ 处的性质的定义要注意两点：一是它和 σ_1 的取法(即 u_1,v_1 的取值)无关(为什么)；二是在有限尖点 $p_1=s_1/r_1$ 处的性质并不是 $z\to s_1/r_1$ 时 $f(z)$的性质，也不是依 $\mathrm{Im}z\to+\infty$时 $f(\sigma_1(z))$的性质(这时 $\sigma_1(z)\to s_1/r_1$). 此外，如果把 $\mathrm{i}\infty$看做是取 $s_1=1,r_1=0$,那么,对 $\mathrm{i}\infty$和有限尖点处的性质的两个定义是一致的(为什么). 还有一个问题是,在前面已指出在等价尖点处的性质本质上应该是相同的,那么,这样的定义是否满足这一要求呢?

设尖点 $p_2=s_2/r_2,(s_2,r_2)=1,r_2\geqslant 1$. 取

$$\sigma_2=\begin{bmatrix}s_2 & u_2\\ r_2 & v_2\end{bmatrix}\in\Gamma,$$

及 $g_2=f\circ[\sigma_2]_k$. 设尖点 $p_1=s_1/r_1$ 和 $p_2=s_2/r_2$ 是 Γ'等价的,即存在 $\gamma\in\Gamma'$使得 $\gamma(s_2/r_2)=s_1/r_1$. 所以有 $\gamma\sigma_2(\mathrm{i}\infty)=\sigma_1(\mathrm{i}\infty)$. 因此存在整数 h 及适当选取±号使得有(为什么)

$$\sigma_1=\pm\gamma\sigma_2T^h \tag{15.15}$$

成立. 因而有

$$g_1=\begin{cases}f\circ[\sigma_1]_k=f\circ[\pm\gamma\sigma_2T^h]_k=-g_2\circ[T^h]_k,\\ \qquad\qquad -I\notin\Gamma',\ 2\nmid k,\ \text{式(15.15)中取“}-\text{”};\\ g_2\circ[T^h]_k,\quad \text{其他}.\end{cases} \tag{15.16}$$

故得

$$f(s_1/r_1)=\begin{cases}\lim\limits_{\mathrm{Im}z\to+\infty}g_1(z)=-\lim\limits_{\mathrm{Im}z\to+\infty}g_2(z)=-f(s_2/r_2),\\ \qquad\qquad -I\notin\Gamma',2\nmid k,\text{式(15.15)中取“}-\text{”};\\ \lim\limits_{\mathrm{Im}z\to+\infty}g_2(z)=f(s_2/r_2),\ \text{其他}.\end{cases} \tag{15.17}$$

以上两式表明：等价尖点处的性质可以相差一个正负号(这并不影响在尖点的解析性状),而这种情形**仅在** $-I\notin\Gamma',2\nmid k$,**以及式(15.15)中取“－”时才可能出现**. 以上的讨论对尖点 $\mathrm{i}\infty$也成立. 此外,对给定的两个等价尖点 $p_1=s_1/r_1$ 和 $p_2=s_2/r_2$,σ_1,σ_2 和 γ 的具体选取,并不影响关系式(15.16)和(15.17)中可能出现的正负号差异(为什么). 这样,同余子群的模函数在尖点处的性质就完全归结为讨

论在尖点 $i\infty$ 处的性质. 下面就来具体讨论尖点处的性质.

先来讨论**在尖点 $i\infty$ 处的性质**. 这和式(5.26)~(5.31)的讨论完全一样,这里重述一下. 对任一 $f(z)\in V_k(\Gamma')$,必有正整数 h,使得

$$f(z)=f(z+h),\tag{15.18}$$

即 h 是 $f(z)$的一个周期(为什么),所以只要在半长条

$$0\leqslant \mathrm{Re}z<h,\quad z\in \boldsymbol{H}\tag{15.19}$$

中来讨论它的性质. 作变换

$$\zeta_h=e^{2\pi iz/h},\tag{15.20}$$

它把由式(15.19)给出的长条一一映射到区域

$$0<|\zeta_h|<1,\tag{15.21}$$

且把 $i\infty$ 变到 0,即当 $\mathrm{Im}z\to+\infty$ 时,$\zeta_h\to 0$,且反过来也对. 记

$$f(z)=F(\zeta_h)=F(e^{2\pi iz/h}).\tag{15.22}$$

这样,**$f(z)$在尖点 $i\infty$ 处的性质就是 $F(\zeta_h)$在点 $\xi_h=0$ 处的性质**. $F(\zeta_h)$是区域(15.21)内的半纯函数. 若点 $\zeta_h=0$ 是孤立奇点,则在点 $\zeta_h=0$ 有 Laurent 展式

$$F(\zeta_h)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\zeta_h^n,\quad 0<|\zeta_h|<1.\tag{15.23}$$

因而有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{2\pi inz/h},\quad z\in \boldsymbol{H}.\tag{15.24}$$

这时我们称**尖点 $i\infty$ 是 $f(z)$的孤立奇点**,上式称为是 **$f(z)$在尖点 $i\infty$ 处的 Fourier 展式**. 定义 $n_0=n_0(i\infty;f,h)$是使展开式(15.24)中 $a_n\neq 0$ 的最小的 n,即

$$a_{n_0}\neq 0,\quad a_n=0,\quad -\infty<n<n_0.\tag{15.25}$$

按 n_0 的不同取值可分为以下几种类型: (i) $n_0=-\infty$,即有无穷多个负值 n 使 $a_n\neq 0$,这时 $\zeta_h=0$ 是 $F(\zeta_h)$的本性奇点,所以就说 **$z=i\infty$ 是 $f(z)$的本性奇点**; (ii) $-\infty<n_0<0$,即只有有限多个负值 n 使 $a_n\neq 0$,这时 $\zeta_h=0$ 是 $F(\zeta_h)$的极点,所以就说 **$z=i\infty$ 是 $f(z)$的极点,其阶为 $|n_0|$,$f(z)$在点 $i\infty$ 是半纯的**; (iii) $n_0\geqslant 0$,这时 $\zeta_h=0$ 是 $F(\zeta_h)$的可去奇点,即定义 $F(0)=a_0$ 后,$F(\zeta_h)$在 $\zeta_h=0$ 解析,所以就说 **$f(z)$在点 $z=i\infty$ 解析**,及

$$f(\mathrm{i}\infty) = \lim_{\mathrm{Im}z\to+\infty} f(z) = F(0) = a_0; \tag{15.26}$$

(iv) $n_0>0$,这时 $\zeta_h=0$ 是 $F(\zeta_h)$的零点,所以就说点 $z=\mathrm{i}\infty$**是** $f(z)$**的零点**,其**阶为** n_0. 这里要指出的是,

(a) 虽然 $n_0=n_0(\mathrm{i}\infty;f,h)$的具体取值及 $f(z)$在尖点 $\mathrm{i}\infty$处的 Fourier 展开式(15.24)都和 h 有关,但容易看出以下的**性状**:

$$\begin{aligned} &n_0=-\infty, \quad -\infty<n_0<0, \\ &n_0\geqslant 0, \quad n_0=0, \quad 及 \quad n_0>0, \end{aligned} \tag{15.27}$$

和 h 的具体取值无关. 所以,**尖点 $\mathrm{i}\infty$是 $f(z)$的本性奇点,极点,解析点,或零点的性状是和 h 的具体取值无关,完全由 $f(z)$本身确定**;

(b) 极点与零点的阶数都和 h 的取值有关. 我们约定: 当把 Γ' 作为 N 级同余子群讨论时,总是取 $h=N$. 同余子群的级不加说明时,按显然情形确定. 这样,**说到极点与零点的阶数时就有了确切的含义**.

现在来讨论 $f(z)$**在有限尖点 p_1 处的性质**. 由定义 15.2(ii)知,$f(z)$在尖点 p_1 处的性质就是同余子群 Γ''的模函数 $g_1(z)$在尖点 $\mathrm{i}\infty$ 处的性质. 所以,当尖点 $\mathrm{i}\infty$是 $g_1(z)$的孤立奇点时,必有正整数 l,使得 $g_1(z)$在尖点 $\mathrm{i}\infty$处就也有形如式(15.24)的 Fourier 展式

$$g_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{1n}(p_1)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz/l}, \quad z\in \boldsymbol{H}. \tag{15.28}$$

这时我们称**有限尖点 p_1 是 $f(z)$的孤立奇点**,上式称为是 $f(z)$**在有限尖点 p_1 处的 Fourier 展式**. 这样,当尖点 $\mathrm{i}\infty$是 $g_1(z)$的本性奇点,极点,解析点,或零点时,就相应地说**有限尖点 p_1 是 $f(z)$的本性奇点,极点,解析点**,或**零点**,以及**阶数**

$$n_0 = n_0(p_1,f,l) = n_0(\mathrm{i}\infty,g,l). \tag{15.29}$$

这里要指出的是: 对于 Γ'的等价尖点 p_1,p_2,由式(15.15)~(15.17)的讨论及式(15.26)知,这里的约定不会改变 n_0 的取值的**性状**(15.27)(注意: 不是具体的**取值**),即不会改变 $f(z)$在等价点处的解析性. 设 $f(z)$在有限尖点 p_2 处的 Fourier 展式是(由于尖点 p_1, p_2 是 Γ' 等价的,所以由式(15.16)知可取相同的 l)

$$g_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{2n}(p_2)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz/l}, \quad z\in \boldsymbol{H}.$$

由式(15.16)知相应地有

$$b_{1n}(p_1)=\pm e^{2\pi i h n/l}b_{2n}(p_2),\quad -\infty<n<+\infty,\tag{15.30}$$

以及当 $n_0=0$ 时可能有

$$\begin{aligned}b_{10}(p_1)&=f(p_1)=g_1(\mathrm{i}\infty)=-g_2(\mathrm{i}\infty)\\&=-f(p_2)=-b_{20}(p_2).\end{aligned}\tag{15.31}$$

因此,在解析的等价尖点处的取值不等于 0 时,**有可能改变正负号**.

这样,模函数在所有尖点处的解析性状都有了明确的含义.因此,同余子群 Γ' 的模函数的定义域就可看做为是 $\Gamma'\backslash H^*$,亦即是 Γ' 的基本区域 $\mathscr{F}^*(\Gamma')$——即亏数为 $g(\Gamma')$ 的闭曲面 $\mathscr{F}^*(\Gamma')$(见§13 的讨论).故而按照尖点处的解析性状可对模函数作进一步的分类.

定义 15.3 设 $f(z)$ 是同余子群 Γ' 的模函数.若每个尖点都是 $f(z)$ 的极点或解析点,那么,$f(z)$ 就称为是**同余子群 Γ' 的半纯模函数**.Γ' 的权为 k 的全体半纯模函数所组成的集合记作 $A_k(\Gamma')$;若 $f(z)$ 在 H 内及所有尖点处均解析,即在 H^* 上解析,那么 $f(z)$ 就称为是**同余子群 Γ' 的模形式**,Γ' 的权为 k 的全体模形式所组成的集合记作 $M_k(\Gamma')$;若 Γ' 的模形式 $f(z)$ 在所有尖点处的值均为零,那么 $f(z)$ 就称为是**同余子群 Γ' 的尖形式**(cusp form),Γ' 的权为 k 的全体尖形式所组成的集合记作 $S_k(\Gamma')$.

设 $p_1,\cdots,p_r$ 是同余子群 Γ' 的全部不等价尖点,$f(z)$ 是 Γ' 的半纯模函数.如果对同一个正整数 h 确定 $n_0(p_1;f,h),\cdots,n_0(p_r;f,h)$(这样的正整数 h 一定存在),那么,我们记

$$n_0(f;h)=\min\{n_0(p_1;f,h),\cdots,n_0(p_r;f,h)\},\tag{15.32}$$

特别的,当 Γ' 是 N 级同余子群时可取 $h=N$.这样,$f(z)$ 是 N 级同余子群 Γ' 的半纯模函数、模形式及尖形式就分别是相应于

$$-\infty<n_0(f;N),\quad n_0(f;N)\geqslant 0\quad 及\quad n_0(f;N)>0.\tag{15.33}$$

由定理 5.5,定理 5.7,式(5.21)~(5.25),式(6.8)和(6.7),就推出

$$G_{2k},\ E_{2k}\in M_{2k}(\Gamma),\ \Delta\in S_{12}(\Gamma),\ J\in A_0(\Gamma),\tag{15.34}$$

$$\eta^{24}\in S_{12}(\Gamma),\quad \tilde{\eta}^{24}\in S_{12}(\Gamma).\tag{15.35}$$

在§17将证明 $\eta^{24}=\tilde{\eta}^{24}$(见式(17.6)).

由定义及关于尖点的讨论立即推出以下性质(证明留给读者).

性质 15.8 0是任一同余子群的权为任意整数的尖形式;常数是任一同余子群的权为零的模形式.

性质 15.9 $V_k(\Gamma')$,$A_k(\Gamma')$,$M_k(\Gamma')$及$S_k(\Gamma')$都是复数域上的线性空间,分别称为是**同余子群 Γ' 上的权为 k 的模函数空间,半纯模函数空间,模形式空间**及**尖形式空间**.

性质 15.10 若 $f\in V_k(\Gamma')$(或 $A_k(\Gamma')$),则

$$1/f\in V_{-k}(\Gamma')(\text{或 } A_{-k}(\Gamma')).$$

性质 15.11 设 f_1,f_2 分别是 N 级同余子群 Γ' 的权为 k_1,k_2 的模函数(半纯模函数,模形式,或尖形式).那么,乘积 f_1f_2 是 Γ' 的权为 k_1+k_2 的模函数(半纯模函数,模形式,或尖形式),且有

$$n_0(f_1f_2,N)\geqslant n_0(f_1,N)+n_0(f_2,N).$$

当 $\Gamma'=\Gamma$ 时,上式取等号.此外,模形式与尖形式的乘积必为尖形式.

性质 15.12 设 f 是 N 级同余子群 Γ' 的权为 k 的模函数(半纯模函数,模形式,或尖形式),$\beta\in\Gamma$,及 $\Gamma''=\beta^{-1}\Gamma'\beta$.那么,$g=f\circ[\beta]_k$ 是同余子群 Γ'' 的权为 k 的模函数(半纯模函数,模形式,或尖形式),且有 $n_0(f,N)=n_0(g,N)$.

设 $f(z)\in V_k(\Gamma')$,$f(z)$在任一尖点 p_1(包括 $i\infty$)的 Fourier 展式即是相应的 $g_1(z)$(见定义 15.2(ii))在尖点 $i\infty$ 的 Fourier 展式.当 $g_1(z)$ 有周期 l 时,它有 Fourier 展式(15.28).现在我们来讨论 l 可能取什么样的值.设 Γ' 在尖点 p_1 处的宽度为 h,这时 $\Gamma''=\sigma_1^{-1}\Gamma'\sigma_1$ 在尖点 $i\infty$ 处的宽度也为 h(为什么).注意到对任意整数 m 有

$$g_1\circ[\pm T^m]_k(z)=(\pm 1)^k g_1(m+z),$$

容易证明(留给读者):当 k 为偶数或 $i\infty$ 是 Γ_1' 的正则尖点时,可取 $l=h$;当 k 为奇数且 $i\infty$ 是 Γ_1' 的非正则尖点时,有

$$g_1(z)=g_1\circ[-T^h]_k(z)=(-1)^k g_1(h+z)=-g_1(h+z), \tag{15.36}$$

因此有

$$g_1(z)=g_1(2h+z), \tag{15.37}$$

所以可取 $l=2h$. 这时,当 $g_1(z)$在尖点 $i\infty$解析时,由式(15.36)立即推出 $g_1(i\infty)=0$. 这就证明了

性质 15.13 设 $f(z)\in M_k(\Gamma')$,k 是奇数. 那么,$f(z)$在 Γ'的任一非正则尖点处的值等于零.

下面的两个性质可以用来构造模函数.

性质 15.14 (i) 设 f 是同余子群 Γ'的权为 k 的模函数(半纯模函数,模形式,或尖形式),

$$\Gamma=\bigcup_{j=1}^{K}\Gamma'\alpha_j.$$

那么

$$F_1=\sum_{j=1}^{K}f\circ[\alpha_j]_k,\quad F_2=\prod_{j=1}^{K}f\circ[\alpha_j]_k$$

分别是 Γ 的权为 k 和 Kk 的模函数(半纯模函数,模形式或尖形式).

(ii) 一般的,若同余子群 $\Gamma''\subseteq\Gamma'$,f 是同余子群 Γ''的权为 k 的模函数(半纯模函数,模形式或尖形式),及有

$$\Gamma'=\bigcup_{j=1}^{K}\Gamma''\alpha_j.$$

那么

$$F_1=\sum_{j=1}^{K}f\circ[\alpha_j]_k,\quad F_2=\prod_{j=1}^{K}f\circ[\alpha_j]_k$$

分别是 Γ'的权为 k 和 Kk 的模函数(半纯模函数,模形式或尖形式).

(iii) 设同余子群 $\Gamma''\subseteq\Gamma'$,f 是同余子群 Γ''的权为 k 的模函数(半纯模函数,模形式或尖形式). 那么,当 Γ''是 Γ'的正规子群时,对任意的 $\sigma\in\Gamma'$,$f\circ[\sigma]_k$ 亦是同余子群 Γ''的权为 k 的模函数(半纯模函数,模形式或尖形式).

证 我们来证(ii)((i)是其特例). 对任一 $\sigma\in\Gamma'$,若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_K$ 是 $\Gamma''\backslash\Gamma'$的一组右陪集代表系,则 $\alpha_1\sigma,\cdots,\alpha_K\sigma$ 也是 $\Gamma''\backslash\Gamma'$的一组右陪集代表系. 由此及性质 15.2 推出

$$F_1\circ[\sigma]_k=\sum_{j=1}^{K}f\circ[\alpha_j\sigma]_k=\sum_{j=1}^{K}f\circ[\alpha_j]_k=F_1,\quad \sigma\in\Gamma',$$

$$F_2\circ[\sigma]_{Kk}=\left\{\prod_{j=1}^{K}f\circ[\alpha_j]_k\right\}\circ[\sigma]_{Kk}=\prod_{j=1}^{K}f\circ[\alpha_j\sigma]_k$$

$$= \prod_{j=1}^{K} f \circ [\alpha_j]_k = F_2, \quad \sigma \in \Gamma'.$$

这就证明了所要的结论.(iii)的证明留给读者.证毕.

性质 15.15 设 Γ' 是同余子群，$\beta \in GL_2^+(\boldsymbol{Q})$，及 $\Gamma'' = (\beta^{-1}\Gamma'\beta) \cap \Gamma$. 那么，若 f 是同余子群 Γ' 的权为 k 的模函数(半纯模函数，模形式或尖形式)，则 $f \circ [\beta]_k$ 是同余子群 Γ'' 的权为 k 的模函数(半纯模函数，模形式或尖形式).

证 必有正整数 l 使

$$l\beta \in GL_2^+(\boldsymbol{Z}),$$

及由定理 34.9($N=r=1$)知，必有 $\alpha \in \Gamma$ 使

$$l\beta = \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}, \quad a \in \boldsymbol{N}.$$

所以有

$$f \circ [\beta]_k = f \circ [l\beta]_k = f \circ [\alpha]_k \circ \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \right)_k.$$

设 $g = f \circ [\alpha]_k$. 同余子群 Γ' 和 $\alpha^{-1}\Gamma'\alpha$ 的级相同，设为 N. 由性质 15.12 知 g 是 $\alpha^{-1}\Gamma'\alpha$ 的模函数(半纯模函数，模形式或尖形式)，且 $n_0(f,N) = n_0(g,N) = r$. 这样就有

$$g(z) = f \circ [\alpha]_k(z) = \sum_{n \geqslant r} a_n e^{2\pi i n z/N}.$$

由以上两式得

$$\begin{aligned} f \circ [\beta]_k(z) &= (a/d)^{k/2} \sum_{n \geqslant r} a_n e^{2\pi i n (az+b)/(dN)} \\ &= (a/d)^{k/2} \sum_{m \geqslant ar} b_m e^{2\pi i m z/(adN)}, \end{aligned} \tag{15.38}$$

其中

$$b_m = \begin{cases} a_{m/a} e^{2\pi i m/(aNd)}, & \text{当 } a \mid m, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

这就证明了在尖点 $i\infty$，f 与 $f \circ [\beta]_k$ 有相同的解析性. 对有限尖点 p，$\sigma(i\infty) = p$，$\sigma \in \Gamma$，代替 f 与 $f \circ [\beta]_k$ 就需要讨论 $f \circ [\sigma]_k$ 与 $f \circ [\beta]_k \circ [\sigma]_k = (f \circ [\sigma]_k) \circ [\sigma^{-1}\beta\sigma]_k$. 完全一样的讨论可以证明在尖点 $i\infty$，$f \circ [\sigma]_k$ 与 $f \circ [\beta]_k \circ [\sigma]_k$ 有相同的解析性，即在有限尖点

p, f 与 $f\circ[\beta]_k$ 也有相同的解析性. 这就证明了所要的结论. 证毕.

显见, 性质 15.15 是性质 15.12 的推广. 下面来举几个构造同余子群的模函数的例子.

例 15.1　设 $B_{(n)}$ 由式(11.38)给出, $N\geqslant 1, f\in V_k(\Gamma)(A_k(\Gamma), M_k(\Gamma)$, 或 $S_k(\Gamma))$, 则 $g=f\circ[B_{(N)}]_k\in V_k(\Gamma_0(N))(A_k(\Gamma_0(N)), M_k(\Gamma_0(N))$, 或 $S_k(\Gamma_0(N)))$.

由性质 15.15 及式(11.44)即得所要结论, 且有

$$g(z)=f\circ[B_{(N)}]_k(z)=N^{k/2}f(Nz). \tag{15.39}$$

下面来求 g 在尖点 $\mathrm{i}\infty$ 和 0 处的 Fourier 展开式. 设 f 在尖点 $\mathrm{i}\infty$ 的 Fourier 展开式是

$$f(z)=\sum{}^{*}a_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz},$$

其中求和条件"$*$"表示 $n\geqslant n_0=n_0(f,1)$. 由以上两式即得 g 在尖点 $\mathrm{i}\infty$ 处的 Fourier 展开式

$$g(z)=N^{k/2}\sum{}^{*}a_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nNz}. \tag{15.40}$$

由 $S(\mathrm{i}\infty)=0$, 及

$$\begin{aligned}g\circ[S]_k(z)&=f\circ[S]_k\circ[S^{-1}B_{(N)}S]_k(z)=f\circ[S^{-1}B_{(N)}S]_k(z)\\&=f\circ[A_{(N)}]_k(z)=N^{-k/2}f(z/N),\end{aligned} \tag{15.41}$$

就得到 g 在尖点 0 处的 Fourier 展开式

$$g\circ[S]_k(z)=N^{-k/2}\sum{}^{*}a_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz/N}. \tag{15.42}$$

显见,

$$\begin{aligned}n_0(\mathrm{i}\infty;g,1)&=Nn_0=Nn_0(f,1),\\n_0(0;g,N)&=n_0=n_0(f,1).\end{aligned} \tag{15.43}$$

例 15.2　设 $B_{(n)}$ 由式(11.38)给出, $f\in V_k(\Gamma(N))(A_k(\Gamma(N)), M_k(\Gamma(N))$, 或 $S_k(\Gamma(N)))$, 则 $g=f\circ[B_{(N)}]_k\in V_k(\Gamma_1(N^2))(A_k(\Gamma_1(N^2)), M_k(\Gamma_1(N^2))$, 或 $S_k(\Gamma_1(N^2)))$.

由性质 15.15 及式(11.40)即得所要结论. 设 f 在尖点 $\mathrm{i}\infty$ 的 Fourier 展开式是

$$f(z)=\sum{}^{*}a_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz/N}, \tag{15.44}$$

其中求和条件"$*$"表示 $n\geqslant n_0=n_0(f,N)$. 利用式(15.39)即得

$$g(z) = N^{k/2}\sum{}^{*} a_n e^{2\pi i n z}, \qquad (15.45)$$

这就是 g 在尖点 $i\infty$处的 Fourier 展开式，这里有

$$n_0(i\infty; g, 1) = n_0(i\infty; f, N).$$

例 15.1 和例 15.2 表明，在作简单变换后，**一般同余子群的模函数可归结为讨论同余子群 $\Gamma_0(N)$和 $\Gamma_1(N)$的模函数**. 下面来讨论 $\Gamma_0(N)$和 $\Gamma_1(N)$的模函数之间的关系.

由定理 11.2(ii)及定理 11.3(ii)知 $\Gamma_1(N)$是 $\Gamma_0(N)$的正规子群，且有陪集分解式(11.21). 容易证明：商群 $\Gamma_1(N)\backslash\Gamma_0(N)$和群 $\boldsymbol{Z}_N^*$ 同构，

$$\Gamma_1(N)\rho(d) \leftrightarrow d, \quad (d, N) = 1 \qquad (15.46)$$

是一个同构对应，$\rho(d)$由式(11.21)给出. 因此，由模 N 的 Dirichlet 特征 χ 可导出商群 $\Gamma_1(N)\backslash\Gamma_0(N)$上的特征，亦记作 χ. 注意到陪集 $\Gamma_1(N)\rho(d)$由 $\rho(d)$确定，以及

$$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N) \Leftrightarrow \sigma \in \Gamma_1(N)\rho(d), \qquad (15.47)$$

所以，商群 $\Gamma_1(N)\backslash\Gamma_0(N)$上的特征 χ 的定义是(请读者解释定义的合理性)：

$$\chi(\sigma) = \chi(\rho(d)) = \chi(d), \quad \sigma \in \Gamma_1(N)\rho(d), \ (d, N) = 1. \qquad (15.48)$$

特别的，$\chi(\sigma)=1, \sigma\in\Gamma_1(N)$. 由此，我们可以进一步讨论模形式空间 $V_k(\Gamma_1(N))$的结构.

性质 15.16　设 $f\in V_k(\Gamma_1(N))$，χ 是模 N 的 Dirichlet 特征. 定义

$$f_\chi = (\varphi(N))^{-1}\sum_{d \bmod N}\bar{\chi}(d) f \circ [\rho(d)]_k. \qquad (15.49)$$

这里的 $\rho(d)$由式(11.22)给出. 那么

(i) $f\circ[\rho(d)]_k((d,N)=1)$及 $f_\chi\in V_k(\Gamma_1(N))$，以及

$$f_\chi \circ [\sigma]_k = \chi(\sigma) f_\chi, \quad \sigma \in \Gamma_0(N), \qquad (15.50)$$

这里的 $\chi(\sigma)$由式(15.48)给出. 特别的，当 χ 是主特征时，$f_\chi\in V_k(\Gamma_0(N))$.

(ii) 对给定的特征 $\chi \bmod N$，定义 $\boldsymbol{H}$ 内的半纯函数集合：

$$V_k(\Gamma_0(N);\chi) = \{f:\ f\circ[\sigma]_k = \chi(\sigma)f,\sigma\in\Gamma_0(N)\}. \tag{15.51}$$

它们都是 $V_k(\Gamma_1(N))$ 的子集，是复数域上的线性空间，两两不交，以及有直和分解

$$V_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\chi \bmod N} V_k(\Gamma_0(N);\chi), \tag{15.52}$$

这里是对模 N 的所有 Dirichlet 特征求和.

(iii) 记

$$A_k(\Gamma_0(N);\chi) = V_k(\Gamma_0(N);\chi)\cap A_k(\Gamma_1(N)), \tag{15.53}$$

$$M_k(\Gamma_0(N);\chi) = V_k(\Gamma_0(N);\chi)\cap M_k(\Gamma_1(N)), \tag{15.54}$$

$$S_k(\Gamma_0(N);\chi) = V_k(\Gamma_0(N);\chi)\cap S_k(\Gamma_1(N)). \tag{15.55}$$

我们有

$$A_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\chi \bmod N} A_k(\Gamma_0(N);\chi), \tag{15.56}$$

$$M_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\chi \bmod N} M_k(\Gamma_0(N);\chi), \tag{15.57}$$

$$S_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\chi \bmod N} S_k(\Gamma_0(N);\chi). \tag{15.58}$$

证　(i)的前一半结论由性质 15.14(iii)直接推出. 下面来证式(15.50). 设 $\sigma=\gamma\rho(l),\gamma\in\Gamma_1(N)$. 注意到 $\rho(d)\rho(l)\in\Gamma_1(N)\rho(dl)$ 及 $\chi(\sigma)=\chi(l)$，我们有

$$f_\chi\circ[\sigma]_k = f_\chi\circ[\rho(l)]_k = (\varphi(N))^{-1}\sum_{d \bmod N}\overline{\chi}(d)f\circ[\rho(dl)]_k$$

$$= \chi(l)(\varphi(N))^{-1}\sum_{d \bmod N}\overline{\chi}(dl)f\circ[\rho(dl)]_k,$$

这就证明了式(15.50). 现在来证(ii). 设 $f\in V_k(\Gamma_1(N))$. 我们有

$$\sum_{\chi \bmod N} f_\chi = (\varphi(N))^{-1}\sum_{d \bmod N} f\circ[\rho(d)]_k\Big\{\sum_{\chi \bmod N}\overline{\chi}(d)\Big\}$$

$$= f\circ[\rho(1)]_k = f. \tag{15.59}$$

这就证明了任一 $f\in V_k(\Gamma_1(N))$ 必可表为各个 $V_k(\Gamma_0(N);\chi)$ 中的函数之和，其他结论是显然的. (iii)的证明留给读者.

性质 15.17　(i) 设 χ 是模 N 的 Dirichlet 特征. 若 $\chi(-1)\neq(-1)^k$，则 $V_k(\Gamma_0(N);\chi)$ 为空集. (ii) 我们有

$$V_k(\Gamma_1(4)) = \begin{cases} V_k(\Gamma_0(4)), & 2\mid k, \\ V_k(\Gamma_0(4);\chi_1), & 2\nmid k, \end{cases} \tag{15.60}$$

其中 χ_1 是模 4 的非主特征，即

$$\chi_1(d)=\begin{cases}(-1)^{(d-1)/2}, & 2\nmid d,\\ 0, & 2\mid d.\end{cases}\tag{15.61}$$

证 因为 $-I\in\Gamma_0(N)$，故若 $f\in V_k(\Gamma_0(N);\chi)$，则有 $(-1)^k f=f\circ[-I]_k=\chi(-1)f$. 而这成立的充要条件就是 $\chi(-1)=(-1)^k$，这就证明了(i). 由于模 4 只有两个特征：一个主特征，另一个就是 χ_1，因此由(i)及性质 15.16 就推出式(15.60). 证毕.

性质 15.16 表明，对 $\Gamma_1(N)$ 的模函数的讨论可归结为讨论 $V_k(\Gamma_0(N);\chi)$. 由定义(15.51)知，它和 $\Gamma_0(N)$ 的模函数的差别仅在于多了一个乘子 $\chi(\sigma)$. 这是模函数概念的扩展，是十分重要的. 我们把 $V_k(\Gamma_0(N);\chi)$ $(A_k(\Gamma_0(N);\chi)$，$M_k(\Gamma_0(N);\chi)$ 或 $S_k(\Gamma_0(N);\chi))$ 中的函数相应地称为**同余子群 $\Gamma_0(N)$ 的带特征 χ 的权为 k 的模函数(半纯模函数，模形式或尖形式)**.

下面来介绍几个和线性空间 $V_k(\Gamma_0(N);\chi)$ 有关的算子.

性质 15.18 设 $W_{(n)}$ 由式(11.38)给出，映射

$$f\mapsto f\circ[W_{(N)}]_k\tag{15.62}$$

是线性空间 $V_k(\Gamma_0(N);\chi)$ $(A_k(\Gamma_0(N);\chi)$，$M_k(\Gamma_0(N);\chi)$ 和 $S_k(\Gamma_0(N);\chi))$ 分别到线性空间 $V_k(\Gamma_0(N);\overline{\chi})$ $(A_k(\Gamma_0(N);\overline{\chi})$，$M_k(\Gamma_0(N);\overline{\chi})$ 和 $S_k(\Gamma_0(N);\overline{\chi}))$ 的同构映射.

证 设 $f\in V_k(\Gamma_0(N);\chi)$，$\sigma\in\Gamma_1(N)\rho(d)\subseteq\Gamma_0(N)$ 由式(15.47)给出. 由式(11.42)知，$W_{(N)}\sigma W_{(N)}^{-1}\in\Gamma_1(N)\rho(a)\subseteq\Gamma_0(N)$，由此及性质 15.16 得到

$$\begin{aligned}(f\circ[W_{(N)}]_k)\circ[\sigma]_k&=(f\circ[W_{(N)}\sigma W_{(N)}^{-1}]_k)\circ[W_{(N)}]_k\\&=\chi(a)(f\circ[W_{(N)}]_k)=\overline{\chi}(\sigma)(f\circ[W_{(N)}]_k).\end{aligned}$$

利用性质 15.12，这就证明了所要的结论.

性质 15.19 映射

$$f(z)\mapsto\overline{f(-\overline{z})}\tag{15.63}$$

称为**对称共轭变换**，记作

$$f\mapsto Kf.\tag{15.64}$$

这一映射是线性空间 $V_k(\Gamma_0(N);\chi)$ $(A_k(\Gamma_0(N);\chi)$，$M_k(\Gamma_0(N);\chi)$

和 $S_k(\Gamma_0(N);\chi)$)分别到线性空间 $V_k(\Gamma_0(N);\overline{\chi})$($A_k(\Gamma_0(N);\overline{\chi})$, $M_k(\Gamma_0(N);\overline{\chi})$和 $S_k(\Gamma_0(N);\overline{\chi})$)的同构映射.

证 设 $\sigma\in\Gamma_0(N)$由式(15.47)给出. 容易验证:

$$Kf\circ[\sigma]_k = K(f\circ[\sigma']_k), \tag{15.65}$$

其中

$$\sigma' = \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N).$$

因此,

$$Kf\circ[\sigma]_k = K(\chi(\sigma')f) = \overline{\chi}(\sigma)(Kf).$$

由此及性质 15.12 就证明了所要的结论.

由性质 15.18 和性质 15.19 立即推出(证明留给读者)

性质 15.20 合成映射

$$f \mapsto (Kf)\circ[W_{(N)}]_k \tag{15.66}$$

和

$$f \mapsto K(f\circ[W_{(N)}]_k) \tag{15.67}$$

均是线性空间 $V_k(\Gamma_0(N);\chi)$($A_k(\Gamma_0(N);\chi)$, $M_k(\Gamma_0(N);\chi)$和 $S_k(\Gamma_0(N);\chi)$)的自同构映射,且有

$$(Kf)\circ[W_{(N)}]_k = (-1)^k K(f\circ[W_{(N)}]_k). \tag{15.68}$$

因此,当 $2|k$ 时这两个映射相同.

在本节最后,我们作两点注记.

注记 1 对函数在权为 k 的 α 变换下不变的概念从微分形式的角度作一简单的说明. 设 $\alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{R})$由式(15.1)给出,我们有微分

$$\mathrm{d}\alpha(z) = \mathrm{d}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = |\alpha| j(\alpha;z)^{-2}\mathrm{d}z. \tag{15.69}$$

这样,对整数 k 就有

$$(\mathrm{d}\alpha(z))^k = |\alpha|^k j(\alpha;z)^{-2k}(\mathrm{d}z)^k.$$

因此,k 次微分形式 $f(z)(\mathrm{d}z)^k$ 在变换 $\alpha(z)$下满足

$$f(\alpha(z))(\mathrm{d}\alpha(z))^k = |\alpha|^k j(\alpha;z)^{-2k} f(\alpha(z))(\mathrm{d}z)^k. \tag{15.70}$$

这样一来,f 满足 $f=f\circ[\alpha]_{2k}$ 就等价于

$$f(\alpha(z))(\mathrm{d}\alpha(z))^k = f(z)(\mathrm{d}z)^k. \tag{15.71}$$

这也就是说 f 在权为 $2k$ 的 α 变换下不变就等价于 k 次微分形式

$f(z)(dz)^k$**在变换** $\alpha(z)$ **下不变**. 我们也可用这样的观点来定义模群的模函数,而相应的微分形式的定义域实际上就是模群的基本区域——闭曲面.

注记 2 对一般模函数的概念作一简单的不严格的说明. 在 §5 引进了模群的模函数的概念. 事实上,关系式(15.50)是对模函数的概念的一种推广. 一般的,我们可作如下考虑. 设模群 $\Gamma' \subseteq \Gamma$, k 是整数,以及 ν 是模群 Γ' 的特征函数(也称为是模群 Γ' 的**乘子系统**(或**乘子**)),即满足

$$|\nu(\alpha)| = 1,\ \alpha \in \Gamma' \quad \text{及}\quad \nu(\alpha\beta) = \nu(\alpha)\nu(\beta),\quad \alpha,\beta \in \Gamma'. \tag{15.72}$$

$\boldsymbol{H}$ 内的半纯函数 f 称为是**模群 Γ' 的具有乘子 ν 的权为 k 的模函数**,如果满足

$$\nu(\alpha) f \circ [\alpha]_k = f,\quad \alpha \in \Gamma'. \tag{15.73}$$

由于满足条件(15.72),所以关系式(15.73)和性质 15.2 是相容的. 因此,条件(15.72)也称为是乘子 ν 的**一致性关系**. 显见,乘子 ν 需满足

$$\nu(-I) = (-1)^k. \tag{15.74}$$

这样一来,性质 15.16 中的 f_χ 就是 $\Gamma_0(N)$ 的具有乘子 $\bar{\chi}$ 权为 k 的模函数. 这种一般模函数的概念还可进一步推广到权为非整数的情形,以至讨论一般算术子群的自守函数. 关键在于确定乘子 ν,即确定它的辐角的取值. 这些都不属于本书的讨论范围,但确是模形式理论中最重要内容的一部分. 为了让读者有一点直观的了解,下面就权 $k=1/2$ 的情形作简单说明.

由式(15.35)知 $\eta^{24} \in S_{12}(\Gamma)$,即 $\eta^{24}(\alpha(z)) = \eta^{24}(z)$, $\alpha \in \Gamma$. 一个十分自然的问题是 $\eta(\alpha(z))$ $(\alpha \in \Gamma)$ 和 $\eta(z)$ 之间有什么关系? 同样的,在 §20 例 20.3 将证明: $\theta_2^4 \in M_2(\Gamma_0(4))$,即 $\theta_2^4(\alpha(z)) = \theta_2^4(z)$, $\alpha \in \Gamma_0(4)$. 我们也会问 $\theta_2(\alpha(z))$ $(\alpha \in \Gamma_0(4))$ 和 $\theta_2(z)$ 之间会有怎样的关系? 由式(15.7)容易看出,应有

$$\eta(\alpha(z)) = \omega(\alpha(z))\sqrt{cz+d}\,\eta(z),\quad \omega^{24}(\alpha(z)) = 1,$$

这里 $\alpha \in \Gamma$ 由式(15.1)给出. 对 $\theta_2(z)$ 也有类似结果. 这样,问题就归结为确定因子 $\omega(\alpha(z))$,但这是相当不容易的. 下面我们只叙述结

论,而不加证明.

(A) Dedekind η 函数的函数方程.

设 $\alpha\in\Gamma$ 由式(15.1)给出,$z\in\boldsymbol{H}$,m 是正整数,及$(m,h)=1$. 再设

$$s(h,m)=\sum_{r \bmod m}\left(\left(\frac{r}{m}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{m}\right)\right). \tag{15.75}$$

它称为 **Dedekind 和**,其中

$$((x))=\begin{cases}x-[x]-1/2, & x\neq \text{整数},\\ 0, & x=\text{整数}.\end{cases} \tag{15.76}$$

那么,当 $c\neq0$ 时,

$$\eta(\alpha(z))=\mathrm{e}^{\varepsilon(\alpha)}\sqrt{cz+d}\;\eta(z), \tag{15.77}$$

其中规定辐角

$$-\pi\leqslant\arg(cz+d)<\pi, \tag{15.78}$$

$\sqrt{1}=1$,以及当 $c>0$ 时,

$$\varepsilon(\alpha)=\varepsilon(a,b,c,d)=\frac{\pi\mathrm{i}}{12}\frac{a+d}{c}-\pi\mathrm{i}\,s(d,c)-\frac{\pi\mathrm{i}}{4}; \tag{15.79}$$

当 $c<0$ 时,

$$\varepsilon(\alpha)=\varepsilon(a,b,c,d)=\frac{\pi\mathrm{i}}{12}\frac{a+d}{c}+\pi\mathrm{i}\,s(d,-c)+\frac{\pi\mathrm{i}}{4}; \tag{15.80}$$

当 $c=0$ 时(必有 $a=d=\pm1$),

$$\varepsilon(\alpha)=\varepsilon(\pm1,b,0,\pm1)=\pm\frac{\pi\mathrm{i}}{12}b. \tag{15.81}$$

此外,我们有

$$\mathrm{e}^{24\varepsilon(\alpha)}=1. \tag{15.82}$$

这一结论的证明见[P&P1,第三十五章§4]. 这样,简单地说,当取 $\nu(\alpha)=\mathrm{e}^{-\varepsilon(\alpha)}$时,$\eta(z)$就是完全模群 Γ 的具有乘子 ν 的权为 1/2 的尖形式.

(B) Theta 函数 $\theta_2(z)$的函数方程.

设 $\alpha\in\Gamma_0(4)$由式(15.1)给出,$z\in\boldsymbol{H}$,那么有

$$\theta_2(\alpha(z))=\left(\frac{c}{d}\right)\varepsilon^{-1}(d)\sqrt{cz+d}\;\theta_2(z), \tag{15.83}$$

其中$\left(\frac{c}{d}\right)$是二次剩余符号,即

$$\left(\frac{c}{d}\right)=\begin{cases}\left(\frac{c}{d}\right), & d>0,\\ \left(\frac{c}{|d|}\right), & d<0,c>0,\\ -\left(\frac{c}{|d|}\right), & d<0,c<0,\end{cases}\tag{15.84}$$

$cz+d$ 的辐角由式(15.78)规定,$\sqrt{1}=1$,以及

$$\varepsilon(d)=\begin{cases}1, & d\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4),\\ \mathrm{i}, & d\equiv -1(\mathrm{mod}\ 4).\end{cases}\tag{15.85}$$

这一结论的证明可见[NK,第三章§4].这样,简单地说,当取$\nu(\alpha)=\left(\frac{c}{d}\right)\varepsilon(d)(\alpha\in\Gamma_0(4))$时,$\theta_2(z)$就是同余子群$\Gamma_0(4)$的具有乘子$\nu(\alpha)$的权为 1/2 的模形式.

最后,再说一次,以上讨论都是不严格的,半整权模函数的理论请读者阅读有关书籍.

§16 半纯模函数的基本性质

本节将证明同余子群的半纯模函数的一个基本性质,它刻画了这类函数在同余子群的基本区域上的零点、极点的阶数与权之间的关系,是本章以下部分讨论的基础.首先来讨论完全模群的半纯模函数.

定理 16.1 设 k 是整数,$f\in A_{2k}(\Gamma)$,且不恒为零,当 $\tau\in \boldsymbol{H}$ 时,设整数 n 满足

$$f(z)=(z-\tau)^n g(z),\quad g(z)\text{ 在点 }\tau\text{ 解析且不等于零}.\tag{16.1}$$

我们记

$$\nu(\tau;f)=\nu(\tau;f,\Gamma)=\begin{cases}n, & \tau\in\boldsymbol{H},\\ n_0(\tau;f,1), & \tau\in\boldsymbol{H}^*\text{ 是尖点},\end{cases}\tag{16.2}$$

其中 $n_0(\tau;f,h)$的定义见式(15.25)和(15.29).我们称 $\nu(\tau;f)$

$(=\nu(\tau;f,\Gamma))$为完全模群的半纯模函数在点 τ 的阶. 再设 $\mathscr{F}^*=\mathscr{F}^*(\bar{\Gamma})$是 $\bar{\Gamma}$ 的基本区域(见式(9.8)). 那么,f 在 $\mathscr{F}^*$ 上的全部零点与极点的阶数 $\nu(\tau;f)$有关系式

$$\nu(\mathrm{i}\infty;f)+(1/2)\nu(\mathrm{i};f)+(1/3)\nu(\rho;f)$$
$$+\sum{}^*\nu(\tau;f)=2k/12, \qquad (16.3)$$

其中求和号$\sum^*$表示对 f 在 $\mathscr{F}^*$ 上的所有零点与极点 τ 求和,$\tau\neq\mathrm{i}$, ρ,及 $\mathrm{i}\infty$.

附注 由于点 i 的邻域只有一半属于基本区域 $\mathscr{F}^*$,点 ρ 的邻域只有三分之一属于基本区域 $\mathscr{F}^*$,我们可**合理地约定**完全模群的半纯模函数 f 在点 i 和点 ρ 处的零点与极点在基本区域 $\mathscr{F}^*$ 上的阶数分别是 f 在点 i 和点 ρ 处的零点与极点的自然阶数(即$|\nu(\tau;f)|$)的 1/2 和 1/3. 由式(16.3)容易看出,当 $f\in A_0(\Gamma)$时,f 在点 i 和点 ρ 处的零点与极点的自然阶数一定分别是 2 和 3 的倍数. 因此,**当 $f\in A_0(\Gamma)$时,在这约定下,f 在点 i 和点 ρ 处的零点与极点在基本区域 $\mathscr{F}^*$ 上的阶数都是整数,且在基本区域 $\mathscr{F}^*$ 上,f 的零点在基本区域 $\mathscr{F}^*$ 上的阶数之和等于 f 的极点在基本区域 $\mathscr{F}^*$ 上的阶数之和.**

证 由 $f\in A_{2k}(\Gamma)$知,在 $\mathscr{F}^*$ 上 f 只有有限个零点和极点,因此,式(16.3)左边是一有限和. 除 i,ρ,i∞外,在 $\mathscr{F}^*$ 上 f 的零点和极点可分为三部分. (i) 在 $\mathscr{F}^*$ 内的零点与极点 $z_{1,1},\cdots,z_{1,l}$,它们与边界的距离大于 $\varepsilon_0>0$,虚部小于 T_0; (ii) 在边界直线 $-1/2+\mathrm{i}t$ $(\sqrt{3}/2<t<+\infty)$上的零点与极点: $z_{2,1}=-1/2+\mathrm{i}t_1,\cdots,z_{2,m}=-1/2+\mathrm{i}t_m$,其中虚部 t_j 以递减次序排列且均小于 T_0; (iii) 在边界圆弧 $e^{\mathrm{i}\theta}(\pi/2<\theta<2\pi/3)$上的零点与极点: $z_{3,1}=e^{\mathrm{i}\theta_1},\cdots,z_{3,h}=e^{\mathrm{i}\theta_h}$,其中辐角 θ_j 以递减次序排列. 这样,对适当大的 $T>T_0$ 及适当小的正数 $\varepsilon<\varepsilon_0$,一定可以取到由以下 $L_1,\cdots,L_8$ 组成的不自交的正向围道 L (见图 16.1),使得除 i,ρ,i∞外,f 所有的零点和极点均在其内:

L_1: $-1/2\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant 1/2$, $\mathrm{Im}z=T$;

L_2: 由相间的线段(共 $m+1$ 段)和左半圆弧(共 m 个)连接组成:

$$\mathrm{Re}z=-1/2,\quad t_1+\varepsilon\leqslant \mathrm{Im}z\leqslant T,$$

$$t_j+\varepsilon\leqslant \mathrm{Im}z\leqslant t_{j-1}-\varepsilon\quad(2\leqslant j\leqslant m),$$
$$\sqrt{3}/2+\varepsilon\leqslant \mathrm{Im}z\leqslant t_m-\varepsilon,$$

及

$$z-z_{2,j}=\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\quad \pi/2\leqslant\theta\leqslant 3\pi/2,\quad 1\leqslant j\leqslant m;$$

L_3：以 ρ 为圆心，ε 为半径的圆周中属于 $\mathscr{F}^*$ 的一段弧：

$$\rho+\varepsilon^{\mathrm{i}\theta},\quad \pi/6\leqslant\theta\leqslant\pi/2;$$

L_4：由这样两部分圆弧组成. 一是圆弧 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\pi/2\leqslant\theta\leqslant 3\pi/2)$ 上满足以下条件的 $h+1$ 段小弧：

$$|z-p|\geqslant\varepsilon,|z-z_{3,j}|\geqslant\varepsilon(1\leqslant j\leqslant n),\quad 及\ |z-\mathrm{i}|\geqslant\varepsilon;$$

另一部分是以 $z_{3,j}(1\leqslant j\leqslant h)$ 为圆心以 ε 为半径的圆周中不属于 $\mathscr{F}^*$ 的 h 段弧，即

$$z\notin\mathscr{F}^*,\quad |z-z_{3,j}|=\varepsilon,\quad 1\leqslant j\leqslant h;$$

L_5：以 i 为圆心，ε 为半径的圆周中属于 $\mathscr{F}^*$ 的一段弧；

L_6：L_4 在变换 S 下的像但方向相反，即是 $-(S(L_4))$；

L_7：以 $1/2+\sqrt{-3}/2=-\bar{\rho}$ 为圆心，ε 为半径的圆周中属于 $\mathscr{F}^*$ 的一段弧；

L_8：L_2 在变换 T 下的像但方向相反，即是 $-(T(L_2))$.

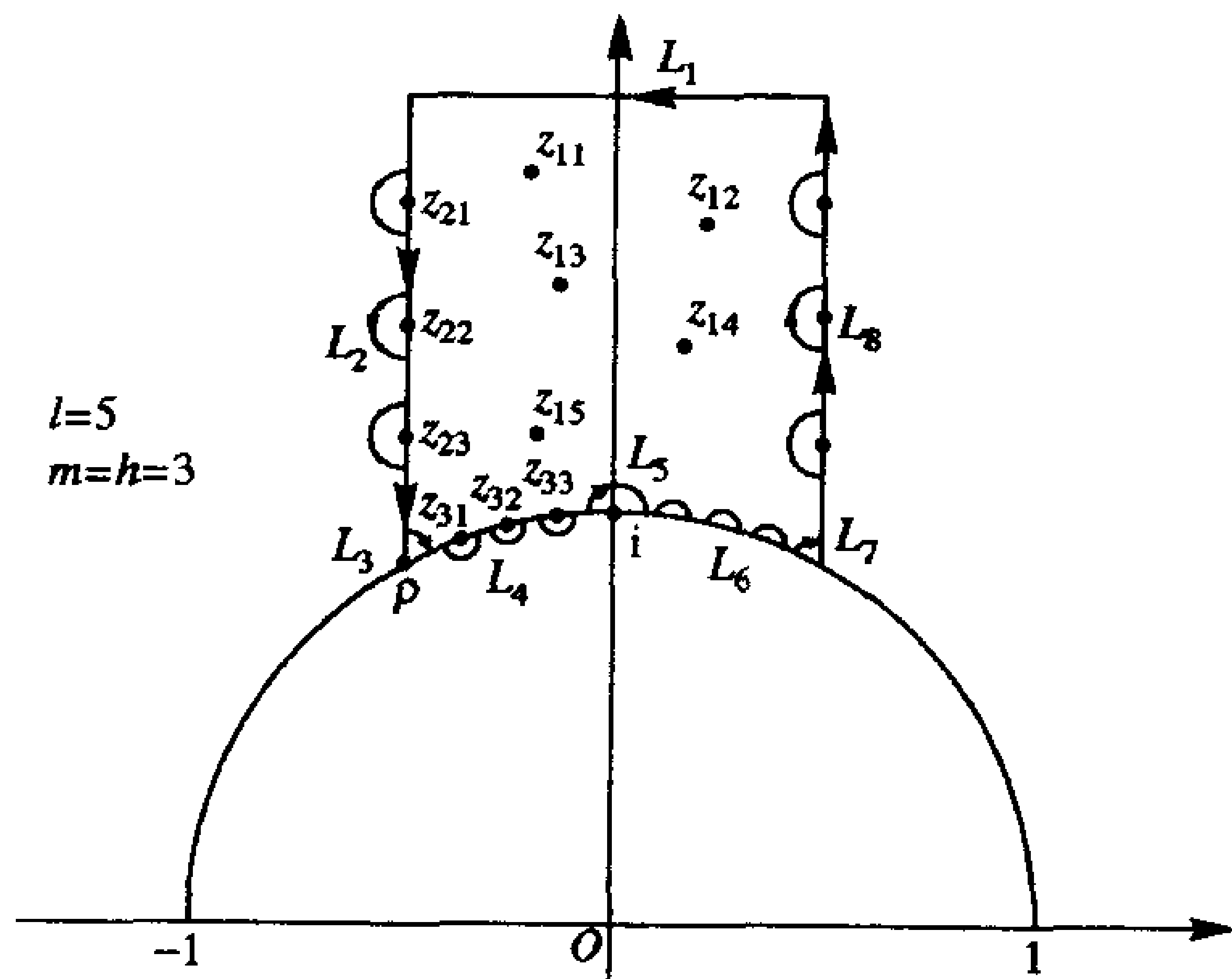


图 16.1

由留数定理知(以下的 $L,L_1,\cdots,L_8$ 的走向均取相对于 $\mathscr{F}^*$ 为正向)：

$$\sum{}^{*}\nu(\tau;f)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{L_1}+\cdots+\int_{L_8}\right\}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\{I_1+\cdots+I_8\}.$$

下面来计算这八个积分. 作变换 $w=e^{2\pi iz}$，记 $F(w)=f(z)$，按 f 在 $i\infty$处的值的约定得到：

$$\frac{1}{2\pi i}I_1=\frac{-1}{2\pi i}\int_{|w|=r(T)}\frac{F'(w)}{F(w)}dw=-\nu(0;F)=-\nu(i\infty;f),$$

这里 $r(T)=e^{-2\pi T}$，积分取逆时针方向. 利用

$$f(Tz)=f(z+1)=f(z),$$

得

$$\frac{1}{2\pi i}\{I_2+I_8\}=0.$$

注意到在点 ρ 及 i 处，$\mathscr{F}^*$ 的边界的两测地线的夹角分别为 $\pi/3$ 及 π，因此，当 $\varepsilon\to 0$ 时有

$$\frac{1}{2\pi i}I_3\to\frac{-1}{6}\nu(\rho;f),\qquad\frac{1}{2\pi i}I_7\to\frac{-1}{6}\nu(\rho;f),$$
$$\frac{1}{2\pi i}I_5\to\frac{-1}{2}\nu(i;f).$$

最后来计算 I_4 和 I_6. 作变换 $z=Sw$，我们有

$$f(z)=f(Sw)=w^{2k}f(w)$$

及

$$f'(z)=\frac{d}{dw}(w^{2k}f(w))\frac{dw}{dz}=2kw^{2k+1}f(w)+w^{2k+2}f'(w).$$

因此，

$$\frac{1}{2\pi i}I_6=\frac{1}{2\pi i}\int_{-(S(L_4))}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{-1}{2\pi i}\int_{L_4}\left\{\frac{2k}{w}+\frac{f'(w)}{f(w)}\right\}dw.$$

进而有(为什么)

$$\frac{1}{2\pi i}(I_4+I_6)=\frac{-2k}{2\pi i}\int_{L_4}\frac{1}{w}dw=\frac{2k}{12}.$$

综合以上的结果即得式(16.3). 证毕.

定理 16.1 还可这样证明：先证明当 $k=0$(即权 $2k=0$)时式(16.3)成立，证法和原来完全一样，但这时计算 L_4，L_6 上的积分时将

得到 $I_4+I_6=0$，所以结论成立. 对一般情形，考虑 $g=f^{12}\Delta^{-2k}$，它是权为 0 的模函数，所以对 g 有式(16.3)($k=0$)成立. 由于判别式函数 Δ 除了 $\mathrm{i}\infty$ 是它的一阶零点外，没有任何其他的零点与极点，所以，除了 $\mathrm{i}\infty$ 外，g 和 f 有相同的零点或极点，且 g 的阶数是 f 的阶数的 12 倍；在点 $\mathrm{i}\infty$ 处有，

$$\nu(\mathrm{i}\infty;g)=12\nu(\mathrm{i}\infty;f)-2k. \tag{16.4}$$

由此及式(16.3)对 $k=0$ 成立就推出式(16.1)对所有 k 成立.

这个证明的好处不仅是揭示了 $2k/12$ 的意义，而且容易很清楚地把定理 16.1 推广到一般同余子群 Γ' 的半纯模函数. 为了作这样的推广，代替完全模群的半纯模函数在点 τ 的阶 $\nu(\tau;f)=\nu(\tau;f,\Gamma)$，首先要明确地规定同余子群 Γ' 的半纯模函数在点 τ 的阶 $\nu(\tau;f,\Gamma')$. 设 $f\in A_k(\Gamma')$，我们定义

$$\nu(\tau;f,\Gamma')=\begin{cases}\nu(\tau;f,\Gamma), & \tau\in\boldsymbol{H},\\ (1/2)n_0(\tau;f^2,h), & \tau\in\boldsymbol{H}^*\text{ 是尖点},\end{cases} \tag{16.5}$$

这里 h 是尖点 τ 的宽度，$n_0(p;f^2,h)$ 的定义见式(15.25)和(15.29). 要说明的是这里考虑 f^2 而不是 f 的理由是：因为当 τ 为非正则尖点，k 为奇数时，h 不是 f 的周期，但 h 一定是 $f^2\in A_{2k}(\Gamma')$ 的周期. 显见，对 Γ' 的等价点 τ_1,τ_2，我们有

$$\nu(\tau_1;f,\Gamma')=\nu(\tau_2;f,\Gamma'). \tag{16.6}$$

当 τ 为正则尖点或 k 为偶数时

$$\nu(\tau;f,\Gamma')=n_0(\tau;f,h), \tag{16.7}$$

以及当 $f\in A_k(\Gamma)$ 时，

$$\nu(\tau;f,\Gamma')=h\nu(\tau;f,\Gamma). \tag{16.8}$$

这些结论的证明留给读者. 在这样的约定下，我们来证明同余子群 Γ' 的半纯模函数的基本定理.

定理 16.2 设 k 是整数，Γ' 是同余子群，$f\in A_k(\Gamma')$，且不恒为零，以及 $\mathscr{F}'$ 是 Γ' 的基本区域. 设

$$\sum\nolimits^{(\mathrm{i}\infty)}=\sum\nolimits^{(\mathrm{i}\infty)}\nu(\tau;f,\Gamma')$$

表示对 $\mathscr{F}'$ 上的全部 Γ' 不等价的尖点 τ 求和，

$$\sum\nolimits^{(\mathrm{i})}=\sum\nolimits^{(\mathrm{i})}\nu(\tau;f,\Gamma')$$

表示对 $\mathscr{F}'$ 上的全部不等价的二阶椭圆点 τ 求和，

$$\sum^{(\rho)}=\sum^{(\rho)}\nu(\tau;f,\Gamma')$$

表示对 $\mathscr{F}'$ 上的全部不等价的三阶椭圆点 τ 求和，以及

$$\sum{}'=\sum{}'\nu(\tau;f,\Gamma')$$

表示对 $\mathscr{F}'$ 上除 Γ' 的不动点外的全部零点与极点 τ 求和. 再设 $\bar{\Gamma}=\bigcup_{j=1}^{K}\Gamma'\alpha_j$. 那么，$f$ 在 $\mathscr{F}'$ 上的全部零点与极点的阶数 $\nu(\tau;f,\Gamma')$ 有关系式

$$\sum^{(\mathrm{i}\infty)}+(1/2)\sum^{(\mathrm{i})}+(1/3)\sum^{(\rho)}+\sum{}'=kK/12. \tag{16.9}$$

附注 由于 Γ' 二阶椭圆点的邻域只有一半属于基本区域 $\mathscr{F}'$，三阶椭圆点邻域只有三分之一属于基本区域 $\mathscr{F}'$，类似于定理 16.1 的附注，我们可合理地约定同余子群 Γ' 的半纯模函数在二阶椭圆点、三阶椭圆点 z 处的零点与极点在同余子群 Γ' 的基本区域 $\mathscr{F}'$ 上的阶数分别是 f 在该点处的零点与极点的自然阶数(即 $|\nu(z;f)|$)的 1/2 和 1/3. 由此约定及式(16.9)推出：**当 $f\in A_0(\Gamma')$ 时，在基本区域 $\mathscr{F}'$ 上，f 的零点在同余子群 Γ' 的基本区域 $\mathscr{F}'$ 上的阶数之和等于 f 的极点在同余子群 Γ' 的基本区域 $\mathscr{F}'$ 上的阶数之和.**

证 设 $g=f^{12}\Delta^{-k}$，显然有 $g\in A_0(\Gamma')$. 再设

$$F=\prod_{j=1}^{K}g_0[\alpha_j]_0,\quad \text{即}\quad F(z)=\prod_{j=1}^{K}g(\alpha_j(z)).$$

由性质 15.14 推出(为什么)$F\in A_0(\Gamma)$. 这样，从定理 16.1 得到

$$\nu(\mathrm{i}\infty;F)+(1/2)\nu(\mathrm{i};F)+(1/3)\nu(\rho;F)+\sum{}^{*}\nu(\tau;F)=0.$$

注意到 $\nu(\mathrm{i}\infty;\Delta)=1$ 及 Δ 无任何其他零点和极点，由以上两式及我们上面的约定，容易推出(为什么)

$$\nu(\mathrm{i}\infty;F)=12\sum^{(\mathrm{i}\infty)}\nu(\tau;f,\Gamma')-kK,$$

$$\nu(\mathrm{i};F)=12\sum^{(\mathrm{i})}\nu(\tau;f,\Gamma')+(12\times 2)\sum{}_2'\nu(\tau;f,\Gamma'),$$

其中 $\sum_2'$ 表示对那些由 $\alpha_j(\mathrm{i})$ 给出的 $\mathscr{F}'$ 的内点 τ 求和(相同的只算一次，所以要乘以 2)

$$\nu(\rho;F) = 12\sum\nolimits^{(\rho)}\nu(\tau;f,\Gamma') + (12\times 3)\sum\nolimits_3'\nu(\tau;f,\Gamma'),$$

其中$\sum_3'$表示对那些由$\alpha_j(\rho)$给出的$\mathscr{F}'$的内点τ求和(相同的只算一次所以要乘以3),以及

$$\sum\nolimits^{*}\nu(\tau;F) = \sum\nolimits_1'\nu(\tau;f,F'),$$

其中$\sum_1'$表示对不是由$\alpha_j(\mathrm{i})$或$\alpha_j(\rho)$给出的$\mathscr{F}'$的内点求和,由以上五式即得式(16.9). 证毕.

§17 完全模群的模形式空间

由定理16.1立即推出关于完全模群的模形式与尖形式的重要基本性质.

定理17.1 (i) 除了f恒等于零外,Γ不存在权等于2或小于零的模形式;

(ii) f是Γ的权为零的模形式的充要条件是f为常数;

(iii) 当$k>1$时,

$$M_{2k}(\Gamma) = S_{2k}(\Gamma)\oplus CE_{2k}; \qquad (17.1)$$

(iv) 当$2k=4,6,8,10,14$时,$S_{2k}(\Gamma)$是零维空间,即仅有f恒等于零,以及

$$M_{2k}(\Gamma) = CE_{2k}; \qquad (17.2)$$

(v) 判别式函数

$$\Delta = (64\pi^{12}/27)(E_4^3 - E_6^2) \qquad (17.3)$$

是权为12的尖形式,且$\mathrm{i}\infty$是Δ的惟一的一个一阶零点. 此外,对任意整数k,有

$$S_{2k}(\Gamma) = \Delta M_{2k-12}(\Gamma). \qquad (17.4)$$

特别地,$S_{12}(\Gamma)$是一维空间:

$$S_{12}(\Gamma) = C\Delta. \qquad (17.5)$$

证 以下恒假定f是Γ的权为$2k$的模形式且不恒为零. 这时式(16.3)成立且左边各项均非负及仅取$n,n/2,n/3$形式的数(n为非负整数). 定理的证明就基于这一点. 由此立即推出(i),因为这样

的数之和不可能小于零或等于 2/12. 当 f 的权为零时,式(16.3)左边各项均必为零,即既无零点又无极点. 所以任取一 $z_0\in \boldsymbol{H}$,有 $f(z_0)=a\neq 0$, $f(z)-a$ 也是 Γ 的权为零的模形式,且有零点,因此 $f(z)-a$ 必恒等于零,这就证明了(ii)的必要性. 充分性是显然的. 当 $k>1$ 时,设 $f(\mathrm{i}\infty)=b$,则有 $f-bE_{2k}\in S_{2k}(\Gamma)$,这就证明了(iii). 若 f 是尖形式,则 $\nu(\mathrm{i}\infty;f)\geqslant 1$,显见这时当 $2k=4,6,8,10,14$ 时式(16.3)不可能成立,由此及(iii)就证明了(iv). 由式(5.22″),(5.48)及(5.49)知 Δ 有表达式(17.3),所以它一定属于 $S_{12}(\Gamma)$. 进而由式(16.3)就推出 $\mathrm{i}\infty$ 是它的惟一的一个一阶零点(这给出了定理 3.6 及 $\mathrm{i}\infty$ 是它的一阶零点的又一证明). 因此,当 $f\in S_{2k}(\Gamma)$ 时, f/Δ 是 Γ 的权为 $2k-12$ 的模形式. 由此及(ii)就证明了式(17.4)和(17.5). 证毕.

已经证明 $\eta^{24},\tilde{\eta}^{24}\in S_{12}(\Gamma)$(见式(15.35)),利用式(5.50),(6.8)及定理 4.9,从定理 17.1(v)容易推出

$$\eta^{24}=\tilde{\eta}^{24}=(2\pi)^{-12}\Delta. \tag{17.6}$$

进而有(为什么)

$$\eta=\tilde{\eta}. \tag{17.6′}$$

利用性质 15.14 可把定理 17.1(ii)推广至同余子群.

定理 17.2　f 为同余子群 Γ' 的权为零的模形式的充要条件是 f 为常数,即 $M_0(\Gamma')=\boldsymbol{C}$.

证　充分性显然成立,下面来证必要性. 设 $f(z_0)=a$. 在性质 15.14(i)的符号(以 $f-a$ 代 f)下,推出

$$F_2(z)=\prod_{j=1}^{K}((f-a)\circ[\alpha_j]_0)(z)=\prod_{j=1}^{K}(f(\alpha_j(z))-a)$$

是 Γ 的权为零的模形式. 显然有 $F_2(z_0)=0$(为什么),由此及定理 17.1(ii)知 F_2 恒等于零,进而推出(为什么)必有一 j 使得 $f(\alpha_j(z))-a$ 恒为零. 这就证明了所要的结论. 证毕.

由式(17.2)立即推出

$$E_8=E_4^2,\quad E_{10}=E_4E_6,\quad E_{14}=E_4^2E_6. \tag{17.7}$$

利用定理 16.1 还可具体定出一些模形式的零点(证明留给读者).

定理 17.3　E_4 仅有一个一阶零点 ρ; E_6 仅有一个一阶零点 i; E_8

仅有一个二阶零点 ρ；E_{10}仅有两个一阶零点 i 和 ρ；E_{14}仅有一个一阶零点 i 和一个二阶零点 ρ.

利用定理 17.1 就可给出模形式空间的结构和维数公式.

定理 17.4　设 $f\in M_{2k}(\Gamma)$，$0\leqslant 2k\neq 2$. 那么，

(i) f 可惟一地表为

$$f=\sum_{r=0}^{[k/6]}{}^{*}a_rE_{2k-12r}\Delta^r, \tag{17.8}$$

这里 a_r 是复数，求和条件 * 表示 $2k-12r\neq 2$，并约定 $E_0\equiv 0$.

(ii)　$E_{2k-12r}\Delta^r,\quad 0\leqslant r\leqslant [k/6],\quad 2k-12r\neq 2$　(17.9)

是线性空间 $M_{2k}(\Gamma)$的一组基，以及有维数公式

$$\begin{aligned}\dim M_{2k}(\Gamma)&=\dim S_{2k}(\Gamma)+1\\&=\begin{cases}[k/6], & k\equiv 1(\bmod 6),\\ [k/6]+1, & k\not\equiv 1(\bmod 6).\end{cases}\end{aligned} \tag{17.10}$$

证　先证(i). 先证表示式(17.8)的惟一性. 若还有表示式

$$f=\sum_{r=0}^{[k/6]}{}^{*}a_r'E_{2k-12r}\Delta^r,$$

则有 $a_0'=f(\mathrm{i}\infty)=a_0$，因而得

$$\sum_{r=0}^{[k/6]}{}^{*}a_rE_{2k-12r}\Delta^r=\sum_{r=0}^{[k/6]}{}^{*}a_r'E_{2k-12r}\Delta^r.$$

比较上式两边在点 i∞处的值就可推出 $a_1'=a_1$. 重复这样的讨论就可依次推出

$$a_j'=a_j,\quad 0\leqslant j\leqslant [k/6],\quad 2k-12j\neq 2.$$

这就证明了惟一性. 现证存在性. 用归纳法. 当 $0\leqslant 2k\leqslant 14$，$2k\neq 2$ 时，由定理 17.1 知结论成立(为什么). 假设当 $0\leqslant 2k\leqslant 2m(\geqslant 14)$，$2k\neq 2$ 时，结论成立. 当 $2k=2(m+1)$时，由式(17.1)知必有 a_0 使 $f-a_0E_{2(m+1)}\in S_{2(m+1)}(\Gamma)$，进而由式(17.3)得

$$f-a_0E_{2(m+1)}=g\Delta,\quad g\in M_{2(m+1)-12}(\Gamma).$$

由此及归纳假设就推出结论当 $2k=2(m+1)$时，结论亦成立. 这就证明了(i). 由惟一性推出式(17.9)给出的这一组函数在 $\boldsymbol{C}$ 上是线性独立的，其个数正是由式(17.10)右边给出，由此及式(17.1)就证明了(ii). 证毕.

下面的定理给出了模形式空间 $M_{2k}(\Gamma)$ 的另一种形式的基.

定理 17.5　在定理 17.4 的条件下,f 可惟一地表为

$$f = \sum_{i,j\geqslant 0}^{**} c_{ij}E_4^iE_6^j, \tag{17.11}$$

其中 c_{ij} 是复数,求和条件 * * 表示 $4i+6j=2k$,即 $M_{2k}(\Gamma)$ 的一组基是:

$$E_4^iE_6^j,\quad i\geqslant 0, j\geqslant 0,\quad 4i+6j=2k. \tag{17.12}$$

证　先证 $f\in M_{2k}(\Gamma)(0\leqslant 2k\neq 2)$ 时一定可表为式(17.11)的形式. 当 $0\leqslant 2k\leqslant 14, 2k\neq 2$ 时,由式(17.1),(17.2),(17.3),(17.5),(17.7)及

$$E_{12}-E_6^2\in S_{12}(\Gamma)$$

知结论成立. 假设当 $0\leqslant 2k\leqslant 2m(\geqslant 14), 2k\neq 2$ 时,结论成立. 当 $2k=2(m+1)$ 时,我们有

$$2(m+1)=\begin{cases}4(l-1)+6, & \text{当 } m=2l,\\ 4l+6, & \text{当 } m=2l+1.\end{cases}$$

因此,相应地取 $a=l-1, l$ 时有(利用式(17.4))

$$E_{2(m+1)}-E_4^aE_6\in S_{2(m+1)}(\Gamma)=\Delta M_{2m-10}(\Gamma).$$

利用式(17.3),由此及归纳假设就推出当 $2k=2(m+1)$ 时结论也成立. 由于模形式空间 $M_{2k}(\Gamma)$ 的维数由式(17.10)给出,所以为了证明式(17.12)是它的一组基,就只要证明式(17.12)所给的这组函数的个数,即不定方程 $4x+6y=2k$ 的非负解数,恰好就由式(17.10)右边给出(为什么). 这证明留给读者(请参看[P&P3,第二章§1 定理 4]).

§18　权为零的半纯模函数及其应用

这一节我们要讨论同余子群 Γ' 的半纯模函数. 对 $f\in A_k(\Gamma')$,如果存在 $F\in M_k(\Gamma')$ 或 $M_{-k}(\Gamma')$,则有 f/F 或 $fF\in A_0(\Gamma')$,所以我们只要讨论 Γ' 权为零的半纯模函数. 先来讨论完全模群 Γ 的权为零的半纯模函数. 已经知道 Klein 模函数(见式(5.24″),(5.25)和(5.50))

$$J(z)=g_2^3(z)/\Delta(z)=g_2^3(z)/(g_2^3(z)-27g_3^2(z)) \quad (18.1)$$

是Γ的权为零的半纯模函数，我们将证明任一Γ的权为零的半纯模函数必可表为$J(z)$的有理函数. 先来讨论$J(z)$的性质.

定理 18.1 (i) $J(z)$仅有一个极点$i\infty$，阶数为1，及一个零点ρ，阶数为3；(ii) $J(z)-1$仅有一个二阶零点i；(iii) 在Γ的基本区域$\mathscr{F}^*$上，$J(z)$取每个复数$c(\neq 0,1,i\infty)$恰好一次，即$J(z)-c(c\neq 0,1,i\infty)$在Γ的基本区域$\mathscr{F}^*$上有且仅有一个一阶零点.

证 由于$i\infty$是$\Delta(z)$的仅有的一个一阶零点(定理17.1(v))，ρ是$g_2(z)$(即$G_4(z)$)的仅有的一个一阶零点(定理17.3)，从式(18.1)就推出(i). 由于$J(z)-1=27g_3^2(z)/\Delta(z)$，所以从定理17.3就推出(ii). 最后证(iii). 显然有$J(z)-c=(g_2^3(z)-c\Delta(z))/\Delta(z)\in A_0(\Gamma)$，且$i\infty$是它的惟一的一阶极点，因此由式(16.3)知，在Γ的基本区域$\mathscr{F}^*$上它有且只有一个零点z_0(为什么). 当$c\neq 1,0$时，已经证明$z_0\neq i,\rho$，所以z_0必为一阶零点. 证毕.

如果注意到§16定理16.1后的附注中关于零点与极点在基本区域$\mathscr{F}^*$上的阶数的约定，我们可以说点ρ和点i分别是$J(z)$和$J(z)-1$在基本区域$\mathscr{F}^*$上的一阶零点. 所以可把定理18.1表述为如下形式：

定理 18.2 在Γ的基本区域$\mathscr{F}^*$上，$J(z)$取每个复数c(包括$0,1,i\infty$)恰好一次，即对每个复数c，$J(z)-c$的零点在Γ的基本区域$\mathscr{F}^*$上的阶数均为1. 因此，$J(z)$把Γ的基本区域$\mathscr{F}^*$一一映射到整个完全复平面$\boldsymbol{C}^*$上.

图18.1给出了$\mathscr{F}^*$和$\boldsymbol{C}^*$之间的一一映射. 注意到$G_{2k}(z)$和$J(z)$都是偶函数，由

$$G_{2k}(x+iy)=G_{2k}(x-iy)=G_{2k}(-x+iy)$$
$$=G_{2k}(-1-x+iy),\quad y>0,$$

推出当$y>0$时，$G_{2k}(iy)$和$G_{2k}(-1/2+iy)$均为实数，因而$J(iy)$和$J(-1/2+iy)$也均为实数. 再由$J(z)$的权为零知$J(-1/z)=J(z)=J(-\bar{z})$，所以$J(e^{i\theta})$也是实数. 因此，$J(z)$把$\mathscr{F}^*$中的三条测地线：$\mathrm{Re}z=-1/2,\sqrt{3}/2\leqslant \mathrm{Im}z<\infty$；$z=e^{i\theta},\pi/2\leqslant\theta\leqslant 2\pi/3$；及$\mathrm{Re}z=0$,

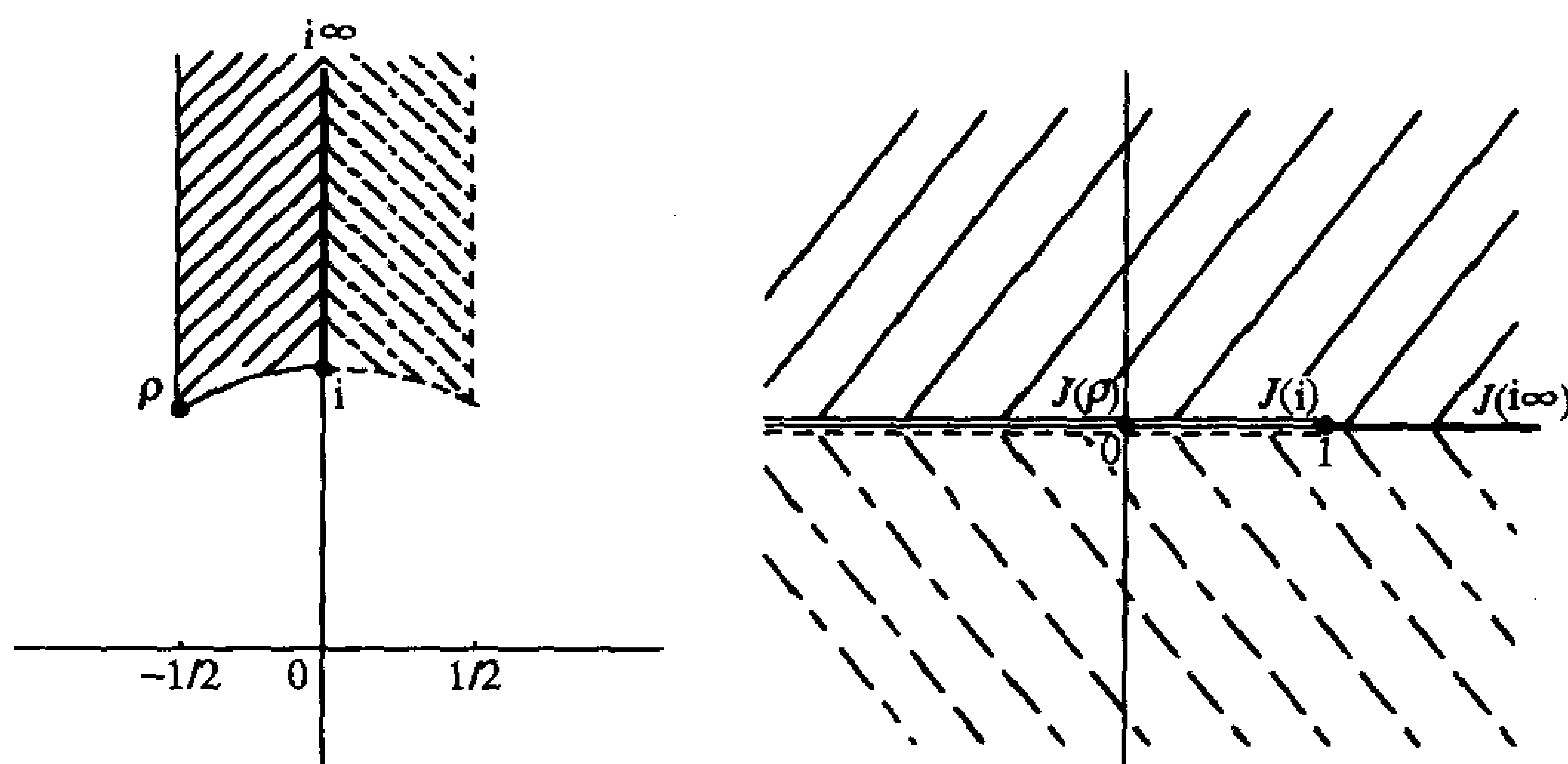


图　18.1

$1\leqslant \mathrm{Im}z<\infty$依次变到$C^*$的实轴上的$-\infty<x\leqslant 0$；$0\leqslant x\leqslant 1$；及$1\leqslant x<+\infty$，以及把$\mathscr{F}^*$内的实部小于零和实部大于零的两部分分别变到$C^*$的上半平面和下半平面.

定理 18.3　$f(z)$是完全模群Γ的权为零的半纯模函数的充要条件是$f(z)$是$J(z)$的有理函数.

证　充分性是显然的. 现证必要性. 由定理 16.1 的附注知，当$k=0$时，在基本区域$\mathscr{F}^*$上，$f(z)$的全部零点(包括$i\infty$)的阶数(按约定计)和与全部极点(包括$i\infty$)的阶数(按约定计)和相等. 因此，在基本区域$\mathscr{F}^*$上的$f(z)$的全部零点与全部极点(包括$i\infty$)可依重数(按约定计)分别计为$z_1,z_2,\cdots,z_n$和$w_1,w_2,\cdots,w_n$. 再设

$$g_j(z)=\begin{cases}J(z)-J(z_j), & \text{当 } z_j\neq i\infty,\\ 1, & \text{当 } z_j=i\infty,\end{cases}\quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

及

$$h_j(z)=\begin{cases}J(z)-J(w_j), & \text{当 } w_j\neq i\infty,\\ 1, & \text{当 } w_j=i\infty,\end{cases}\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

显见

$$F(z)=\prod_{1\leqslant j\leqslant n}(g_j(z)/h_j(z))$$

是完全模群Γ的权为零的半纯模函数，且在基本区域$\mathscr{F}^*$上和$f(z)$有相同的零点和极点(按约定下的重数计). 因此，F/f是完全模群Γ的权为零的半纯模函数且没有零点和极点，所以是模形式，由定理

17.1(ii)知必为常数. 这就证明了所要的结论. 证毕.

现在,我们可以来回答 § 3 定理 3.6 后所提出的问题. 这就是

定理 18.4　设复数 a_2, a_3 满足 $a_2^3-27a_3^2\neq 0$. 那么,必有复数 ω_1, ω_2, $\mathrm{Im}\,\omega_1/\omega_2>0$,使得

$$g_2(\omega_1,\omega_2)=a_2,\quad g_3(\omega_1,\omega_2)=a_3.$$

证　由定理 18.1 知,必有 $z\in \boldsymbol{H}$,使得 $J(z)=a_2^3/(a_2^3-27a_3^2)$. 当 $a_2\neq 0$ 时,取 ω_1,ω_2 满足

$$g_2(z)=a_2\omega_2^4,\quad \omega_1/\omega_2=z.$$

由 $g_2(z)=g_2(z,1)=\omega_2^4 g_2(\omega_1,\omega_2)$就推出 $g_2(\omega_1,\omega_2)=a_2$. 因而有

$$J(z)=g_2^3(\omega_1,\omega_2)/(g_2^3(\omega_1,\omega_2)-27a_3^2).$$

由此及式(18.1)就推出

$$g_3(\omega_1,\omega_2)=\pm\, a_3.$$

若取正号,则 ω_1,ω_2 即为所求. 若取负号,则取 $\omega_1'=\mathrm{i}\omega_1$, $\omega_2'=\mathrm{i}\omega_2$,那么 ω_1',ω_2' 即为所求. 当 $a_2=0$ 时,则取 $z=\rho$,及 ω_1,ω_2 满足

$$g_3(\rho)=a_3\omega_2^6,\quad \omega_1/\omega_2=\rho.$$

这样取的 ω_1,ω_2 就满足要求. 证毕.

下面来讨论同余子群 Γ' 的权为零的半纯模函数. 对权为偶数的模函数不妨假定 $-I\in\Gamma'$ (为什么). 以下总假定

$$-I\in\Gamma',\quad \Gamma=\bigcup_{j=1}^{K}\Gamma'\alpha_j. \tag{18.2}$$

定理 18.5　设 f 是同余子群 Γ' 的权为零的半纯模函数,以及有式(18.2)成立. 那么,f 一定满足 K 次代数方程

$$\sum_{l=0}^{K}F_l(J)f^l=0, \tag{18.3}$$

其中 J 是 Klein 模函数,F_l 是有理函数.

证　考虑多项式

$$H(x)=\prod_{j=1}^{K}(x-f\circ[\alpha_j]_0)=\sum_{l=0}^{K}C_l(f)x^l. \tag{18.4}$$

显见,所有的 $C_l(f)$ 都是 $f\circ[\alpha_j]_0(1\leqslant j\leqslant K)$ 的对称多项式,因此,必有(为什么)

$$C_l(f)\circ[\alpha]_0=C_l(f),\quad \alpha\in\Gamma, \tag{18.5}$$

即 $C_l(f)(0\leqslant l\leqslant K)$ 都是完全模群 Γ 的权为零的半纯模函数. 由定理

18.3 就推出存在有理函数 F_l 使得 $C_l(f)=F_l(J)$. 由此及 $H(f)=0$（为什么）就推出所要结论.

用代数的语言，定理 18.5 可表述为

定理 18.6　设 Γ' 是同余子群，且有式(18.2)成立. 那么，Γ' 的权为零的半纯模函数所组成的域是完全模群 Γ 的权为零的半纯模函数所组成的域 $C(J)$ 的代数扩张，次数不超过 K.

问　　题

1. 试求(i) 由 $\sigma_3(n)$ 表示 $\sigma_7(n)$ 的表达式；(ii) 由 $\sigma_3(n)$，$\sigma_5(n)$ 表示 $\sigma_9(n)$ 的表达式；(iii) 由 $\sigma_5(n)$，$\sigma_7(n)$ 表示 $\sigma_{13}(n)$ 的表示式.

2. (i) 证明：$E_{12}-E_6^2=a\Delta$，a 是一常数，并求 a 的值；(ii) 求出由 $\sigma_5(n)$，$\sigma_{11}(n)$ 表示 $\tau(n)$ 的表达式；(iii) 证明：

$$\tau(n)\equiv\sigma_{11}(n)\,(\mathrm{mod}\ 691).$$

3. (i) 证明恒等式：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^a x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a(n)x^n$.

(ii) 设整数 $a>1$，$a\equiv1\,(\mathrm{mod}\ 4)$. 证明：$E_{a+1}(\mathrm{i})=0$，及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^a}{\mathrm{e}^{2\pi n}-1}=\frac{B_{a+1}}{2(a+1)}=\begin{cases}1/504, & a=5,\\ 1/264, & a=9,\\ 1/24, & a=13\end{cases}\qquad\text{等等.}$$

4. 设 $f\in M_{2k}(\Gamma)$，$g(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}f'(z)-\dfrac{2k}{12}E_2(z)f(z)$. 证明：$g\in M_{2k+2}(\Gamma)$，以及 g 为尖形式的充要条件是 f 为尖形式.

5. (i) 证明：$E_6=E_4E_2-\dfrac{3}{2\pi\mathrm{i}}E_4'$，及 $E_8=E_6E_2-\dfrac{1}{\pi\mathrm{i}}E_6'$；(ii) 利用 $\sigma_1(n)$，$\sigma_3(n)$ 来表示 $\sigma_5(n)$；(iii) 利用 $\sigma_1(n)$，$\sigma_5(n)$ 来表示 $\sigma_7(n)$.

6. 利用 §14 所求出的 $\Gamma'=\Gamma_0(2)$，$\Gamma_0(3)$，$\Gamma(2)$，$\Gamma(3)$，$\Gamma_0(4)$，$\Gamma_1(4)$ 的基本区域，按照证明定理 16.1 的方法来直接证明定理 16.2 对 Γ' 成立.

7. 设 $f\in M_k(\Gamma_0(N),\chi)$，$\chi\bmod N$. 证明：

(i) $f\circ[W_{(N)}^2]_k=(-1)^k f$；

(ii) 若设 $\chi=\overline{\chi}$，$M_k^{\pm}(\Gamma_0(N),\chi)=\{f\in M_k(\Gamma_0(N),\chi):f\circ[W_{(N)}]_k=\pm\mathrm{i}^{-k}f\}$，则有

$$M_k(\Gamma_0(N),\chi) = M_k^+(\Gamma_0(N),\chi) \oplus M_k^-(\Gamma_0(N),\chi).$$

第 8 和第 9 题是从格函数的观点来讨论模函数.

8. 设 Λ 是一个格,$\alpha\in\Gamma$. (i) 设 t 是 Λ 的 N 阶格点. 那么,αt 也是 N 阶格点的充要条件是 $\alpha\in\Gamma_1(N)$;(ii) 设 t_1,t_2 是 Λ 的 N 阶格点的一组基. 那么,$\alpha t_1,\alpha t_2$ 也是 N 阶格点的一组基的充要条件是 $\alpha\in\Gamma(N)$;(iii) 设 $G\subset \boldsymbol{C}/\Lambda$ 是 N 阶循环子群. 那么 αG 也是 N 阶循环子群的充要条件是 $\alpha\in\Gamma_0(N)$.

9. 设 k 为整数,$0\neq\lambda\in\boldsymbol{C}$. 在上题的符号下,我们引进同余子群 $\Gamma'=\Gamma,\Gamma(N),\Gamma_1(N)$,及 $\Gamma_0(N)$时的"模点(modular point)"概念,及权为 k 的模点函数的概念. (i) 当 $\Gamma'=\Gamma$ 时,格 Λ 称为模点,满足 $F(\lambda\Lambda)=\lambda^{-k}F(\Lambda)$的模点函数 $F(\Lambda)$称为 Γ 的权为 k 的模点函数;(ii) 当 $\Gamma'=\Gamma_1(N)$时,$\{\Lambda,t\}$称为模点,满足 $F(\lambda\Lambda,\lambda t)=\lambda^{-k}F(\Lambda,t)$的模点函数 $F(\Lambda;t)$称为 $\Gamma_1(N)$的权为 k 的模点函数;(iii) 当 $\Gamma'=\Gamma(N)$时,$\{\Lambda;t_1,t_2\}$称为模点,满足 $F(\lambda\Lambda;\lambda t_1,\lambda t_2)=\lambda^{-k}F(\Lambda;t_1,t_2)$的模点函数 $F(\Lambda;t_1,t_2)$称为 $\Gamma(N)$的权为 k 的模点函数;(iv) 当 $\Gamma'=\Gamma_0(N)$时,$\{\Lambda;G\}$称为模点,满足 $F(\lambda\Lambda;\lambda G)=\lambda^{-k}F(\Lambda;G)$的模点函数 $F(\Lambda;G)$称为 $\Gamma_0(N)$的权为 k 的模点函数.

设 $\mathrm{Im}\,\omega_1/\omega_2>0,\Lambda=\Lambda(\omega_1,\omega_2),F$ 是 Γ'的模点函数,以及定义复向量函数

$$\widetilde{F}\left(\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}\right)=\begin{cases}F(\Lambda), & \Gamma'=\Gamma;\\ F(\Lambda;\omega_2/N), & \Gamma'=\Gamma_1(N);\\ F(\Lambda;\boldsymbol{Z}\omega_2/N), & \Gamma'=\Gamma_0(N);\\ F(\Lambda;\omega_1/N,\omega_2/N), & \Gamma'=\Gamma(N),\end{cases}$$

再设 $f(z)=\widetilde{F}\left(\begin{bmatrix}z\\ 1\end{bmatrix}\right),z\in\boldsymbol{H}$. 证明:$F$ 是 Γ'的权为 k 的模点函数的充要条件是:(i)

$$\widetilde{F}\left(\gamma\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}\right)=\widetilde{F}\left(\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}\right),\quad \gamma\in\Gamma',$$

且

$$\widetilde{F}\left(\begin{bmatrix}\lambda\omega_1\\ \lambda\omega_2\end{bmatrix}\right)=\lambda^{-k}\widetilde{F}\left(\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}\right),\quad 0\neq\lambda\in\boldsymbol{C};$$

或 (ii) $f\circ[\gamma]_k=f$, $\gamma\in\Gamma'$.

第六章　同余子群的模形式

同余子群的模形式和同余子群的模形式空间是很复杂的，对此了解得还不多. 在 § 19 我们不加证明的给出了同余子群的模形式空间的维数公式，在 § 20 给出了几个同余子群的模形式的例子，它们在以后是有用的. 此外，在 § 21 引入了 Petersson 内积的概念，它在模形式理论中是很重要的. 这就是本章的内容.

§ 19　同余子群的模形式空间的维数

在 § 17 我们给出了完全模群的模形式空间及尖形式空间的维数公式，这一公式是基于定理 16.1——完全模群的半纯模函数的基本定理（它给出了完全模群的半纯模函数的零点、极点的阶数与权之间的明确关系），完全模群的 Einsenstein 级数及判别式函数而得到的. 原则上，基于定理 16.2 及同余子群的 Einsenstein 级数（见 § 23），这一方法可以用于推导计算同余子群的模形式空间及尖形式空间的维数，但在一般情形下，由于同余子群的基本区域及其不动点分布相当复杂，难以直接得到类似结果. 当然，对极简单的同余子群，用这一方法是可以得到维数公式的. 一般说来，这是属于 Riemann 曲面理论研究的内容，由它的基本定理——Riemann-Roch 定理就可以直接推出同余子群的模形式空间的维数公式. 在本节我们将直接给出这一维数公式，但既不予以证明，也不叙述 Riemann 曲面理论和 Riemann-Roch 定理的有关概念和结论，以及它们和维数公式的关系（因为少量篇幅是说不清楚的）. 有兴趣的读者应该去学习 Riemann 曲面理论. 在此之前，我们先来证明两个简单结论.

定理 19.1　设 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 是同余子群. 则有

(i) $\dim M_0(\Gamma')=1$, $\dim S_0(\Gamma')=0$;

(ii) 当整数 $k<0$ 时，不存在权为 k 的模形式，即 $\dim M_k(\Gamma')=0$.

证 结论(i)就是定理 17.2. 下面来证(ii). 若存在不恒等于零的 $f\in M_k(\Gamma')$. 那么, $f^{12}\Delta^{-k}\in M_0(\Gamma')$. 这里 Δ 是判别式函数. 由定理 17.2 和 $f^{12}\Delta^{-k}$等于常数 $a\neq 0$, 所以 $f^{12}=a\Delta^k$, 它在无穷远点有极点, 这与 f 是模形式矛盾. 证毕.

由定理 16.2 容易得到同余子群的模形式空间的维数的上界估计.

定理 19.2 设 k 是正整数, $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 是同余子群, 以及

$$\overline{\Gamma}=\bigcup_{j=1}^{K}\overline{\Gamma}'\alpha_j.$$

那么

$$\dim M_k(\Gamma')\leqslant 1+kK/12.$$

证 设 $f_1,\cdots,f_m\in M_k(\Gamma')$, 且在复数域上线性无关. 考虑复系数线性组合

$$f(z)=\sum_{j=1}^{m}x_jf_j(z),\quad x_j\in\boldsymbol{C},$$

为简单起见, 假定尖点 $\mathrm{i}\infty$ 是正则的, 宽度为 h(非正则情形的讨论留给读者). 这样, 在尖点 $\mathrm{i}\infty$ 有 Fourier 展式

$$f_j(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_j(n)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz/h},\quad z\in\boldsymbol{H},\ 1\leqslant j\leqslant m.$$

进而有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{m}x_ja_j(n)\right\}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz/h},\quad z\in\boldsymbol{H}.$$

考虑变数 x_j 的齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{m}a_j(n)x_j=0,\quad n=1,2,\cdots,m-2.$$

它必有非显然解 $x_1^*,\cdots,x_m^*$, 因此, 相应的

$$f^*(z)=\sum_{j=1}^{m}x_j^*f_j(z)\in M_k(\Gamma'),$$

它不恒等于零, 且 $\mathrm{i}\infty$ 至少是 $f^*(z)$的 $m-1$ 阶零点. 由定理 16.2 知, 必有 $m-1\leqslant kK/12$, 这就证明了所要的结论.

下面来叙述由 Riemann-Roch 定理推出的同余子群的模形式空间的维数公式. 由定理 19.1 知, 只要讨论权 k 为正整数的情形.

定理 19.3　设 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 是同余子群，$g=g(\Gamma')$ 是 Γ' 基本区域的亏数. 再设 $\mathscr{E}_i=\mathscr{E}_i(\overline{\Gamma}')$，$\mathscr{E}_\rho=\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}')$ 和 $\mathscr{E}_\infty=\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}')$ 分别是 $\overline{\Gamma}'$ 的二阶椭圆点，三阶椭圆点和尖点的个数，以及 $\mathscr{E}_\infty=\mathscr{E}_\infty^++\mathscr{E}_\infty^-$，$\mathscr{E}_\infty^+=\mathscr{E}_\infty^+(\overline{\Gamma}')$ 和 $\mathscr{E}_\infty^-=\mathscr{E}_\infty^-(\overline{\Gamma}')$ 分别是 $\overline{\Gamma}'$ 的正则尖点和非正则尖点的个数. 那么，

(i) 当 k 为偶数时，

$$\dim S_k(\Gamma')=\begin{cases}(k-1)(g-1)+\left[\dfrac{k}{4}\right]\mathscr{E}_i+\left[\dfrac{k}{3}\right]\mathscr{E}_\rho+\left(\dfrac{k}{2}-1\right)\mathscr{E}_\infty, & k\geqslant 4,\\ g, & k=2,\end{cases}\tag{19.1}$$

及

$$\dim M_k(\Gamma')=\begin{cases}\dim S_k(\Gamma')+\mathscr{E}_\infty, & k\geqslant 4;\\ \dim S_k(\Gamma')+\mathscr{E}_\infty-1=g+\mathscr{E}_\infty-1, & k=2.\end{cases}\tag{19.2}$$

(ii) 当 k 为奇数时，

$$\begin{aligned}\dim S_k(\Gamma')=&(k-1)(g-1)+[k/4]\mathscr{E}_i+[k/3]\mathscr{E}_\rho\\ &+((k-1)/2)\mathscr{E}_\infty-(1/2)\mathscr{E}_\infty^+,\quad k\geqslant 3,\end{aligned}\tag{19.3}$$

及

$$\dim M_k(\Gamma')=\begin{cases}\dim S_k(\Gamma')+\mathscr{E}_\infty^+, & k\geqslant 3,\\ \dim S_k(\Gamma')+(1/2)\mathscr{E}_\infty^+, & k=1.\end{cases}\tag{19.4}$$

从定理的结果可以看出以下几点：(i) $S_1(\Gamma')$ 和 $M_1(\Gamma')$ 的维数公式是至今没有解决的问题；(ii) 正则尖点的个数一定为偶；(iii) 当 $k\geqslant 3$ 时，以上公式表明 $\dim S_k(\Gamma')$ 和 $\dim M_k(\Gamma')$ 之间有明确的关系，这将在定理 22.3 证明.

当 $\Gamma'=\Gamma$ 时，$\mathscr{E}_i=\mathscr{E}_\rho=\mathscr{E}_\infty=1$，$g=0$ 及权为偶数，由公式(19.1)和(19.2)即得

$$\dim S_{2k}(\Gamma)=[2k/4]+[2k/3]-k,\quad k\geqslant 2.\tag{19.5}$$

及

$$\dim M_{2k}(\Gamma)=\begin{cases}[2k/4]+[2k/3]-k+1, & k\geqslant 2,\\ 0, & k=1.\end{cases}\tag{19.6}$$

不难验证，当 $k\geqslant 2$ 时，以上结果与公式(17.10)是相同的.

下面应用定理 19.1 来具体计算同余子群 $\Gamma'=\Gamma(N)$, $\Gamma_1(N)$和$\Gamma_0(N)$的模形式空间及尖形式空间的维数. 各个 $\mathscr{E}_i$, $\mathscr{E}_\rho$ 和 $\mathscr{E}_\infty$ 可相应地由定理 12.5, 12.6 及 12.7 得到, 而由式(13.9)知亏数

$$g=g(\overline{\Gamma}')=1+K/12-\mathscr{E}_i/4-\mathscr{E}_\rho/3-\mathscr{E}_\infty/2, \quad (19.7)$$

其中相应的各个 $K=[\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma}']$可由定理 11.3 得到. 以下只写出结论, 具体推导留给读者.

定理 19.4 我们有

(i) $\dim S_{2k}(\Gamma(2))=\begin{cases}k-2, & k\geqslant 2,\\ 0, & k=1,\end{cases}$ 及

$$\dim M_{2k}(\Gamma(2))=k+1, \quad k\geqslant 1.$$

(ii) 当 $N>2$ 时,

$$\dim S_k(\Gamma(N))=\begin{cases}\left\{(k-1)\dfrac{N}{24}-\dfrac{1}{4}\right\}N^2\prod\limits_{p|N}\left(1-\dfrac{1}{p^2}\right), & k\geqslant 3,\\ 1+\left\{\dfrac{N}{24}-\dfrac{1}{4}\right\}N^2\prod\limits_{p|N}\left(1-\dfrac{1}{p^2}\right), & k=2,\end{cases}$$

及

$$\dim M_k(\Gamma(N))=\left\{(k-1)\frac{N}{24}+\frac{1}{4}\right\}N^2\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^2}\right), \quad k\geqslant 2.$$

定理 19.5 我们有

(i) $\dim S_{2k}(\Gamma_1(2))=\begin{cases}[2k/4]-1, & k\geqslant 2,\\ 0, & k=1,\end{cases}$ 及

$$\dim M_{2k}(\Gamma_1(2))=[2k/4]+1, \quad k\geqslant 1.$$

(ii) $\dim S_k(\Gamma_1(3))=\begin{cases}[k/3]-1, & k\geqslant 3,\\ 0, & k=2,\end{cases}$ 及

$$\dim M_k(\Gamma_1(3))=[k/3]+1, \quad k\geqslant 2.$$

(iii) $\dim S_{2k}(\Gamma_1(4))=\begin{cases}k-2, & k\geqslant 2,\\ 0, & k=1,\end{cases}$

$$\dim M_{2k}(\Gamma_1(4))=k+1, \quad k\geqslant 0,$$

及

$$\dim S_{2k-1}(\Gamma_1(4))=k-2, \quad k\geqslant 2,$$
$$\dim M_{2k-1}(\Gamma_1(4))=k, \quad k\geqslant 2.$$

(iv) 当 $N>4$ 时,

$$\dim S_k(\Gamma_1(N)) = \begin{cases} \left\{(k-1)\frac{N^2}{24}\right\}\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) - \frac{1}{4}\prod_{d|N}\varphi(d)\varphi\left(\frac{N}{d}\right), & k \geqslant 3, \\ 1+\frac{N^2}{24}\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) - \frac{1}{4}\prod_{d|N}\varphi(d)\varphi\left(\frac{N}{d}\right), & k = 2, \end{cases}$$

及

$$\dim M_k(\Gamma_1(N)) = \left\{(k-1)\frac{N^2}{24}\right\}\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) + \frac{1}{4}\prod_{d|N}\varphi(d)\varphi\left(\frac{N}{d}\right), \quad k \geqslant 2.$$

$\dim S_k(\Gamma_0(N))$和 $\dim M_k(\Gamma_0(N))$的公式较为冗长，这里就不具体写出来了，由定理 19.1，式(19.7)及以下各式即可得到这些公式：

$$K = [\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}_0(n)] = n\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right),$$

$$\mathscr{E}_i(\overline{\Gamma}_0(n)) = 0,\ 4|n;\quad \mathscr{E}_i(\overline{\Gamma}_0(n)) = \prod_{p|n}\left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\right),\ 4\nmid n,$$

$$\mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}_0(n)) = 0,\ 9|n;\quad \mathscr{E}_\rho(\overline{\Gamma}_0(n)) = \prod_{p|n}\left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right),\ 9\nmid n,$$

$$\mathscr{E}_\infty(\overline{\Gamma}_0(n)) = \mathscr{E}_\infty^+(\overline{\Gamma}_0(n)) = \sum_{d|n}\varphi\left(\left(d,\frac{n}{d}\right)\right).$$

§ 20　同余子群的模形式的例子

本节给出一些具体的同余子群的模形式的例子，它们由 Theta 函数(见式(4.19)和(4.21))

$$\theta(z) = \theta_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z},\quad z \in \boldsymbol{H},$$

及 Dedekind η 函数(见式(6.8))

$$\eta(z) = e^{2\pi i z/24}\prod_{r=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i r z}),\quad z \in \boldsymbol{H}$$

所导出. 先来讨论由 $\theta(z)$导出的例子. 我们记(同式(4.21))

$$\theta_n(z) = \theta(nz),\quad z \in \boldsymbol{H}. \tag{20.1}$$

显然有

$$\theta_1 \circ [T^2]_k = \theta_1,\quad \theta_2 \circ [T]_k = \theta_2, \tag{20.2}$$

$$\theta_1^l \circ [B_{(n)}]_k = n^{2/k}\theta_n^l, \quad l \in \boldsymbol{Z}, \quad n \in \boldsymbol{N}. \tag{20.3}$$

由定理 4.7 知

$$\theta_1(-1/z) = \sqrt{z/\mathrm{i}}\,\theta_1(z), \quad z \in \boldsymbol{H}, \sqrt{1} = 1. \tag{20.4}$$

由此即得

$$z^{-1}\theta_1^2(-1/z) = -\mathrm{i}\theta_1^2(z), \quad z^{-2}\theta_1^4(-1/z) = -\theta_1^4(z), \tag{20.5}$$

即 $$\theta_1^2 \circ [S]_1 = -\mathrm{i}\theta_1^2, \quad \theta_1^4 \circ [S]_2 = -\theta_1^4. \tag{20.5'}$$

还容易推出(留给读者)

$$\theta_1 \circ [T]_k = 2\theta_4 - \theta_1. \tag{20.6}$$

例 20.1 证明：$\theta_1^4 \in M_2(\Gamma(2))$.

由例 14.1(b)知，$\Gamma(2) = \{-I, T^2, ST^2S^{-1}\}$. 由此及式 (20.2) 和(20.5′)就推出

$$\theta_1^4 \circ [\alpha]_2 = \theta_1^4, \quad \alpha \in \Gamma(2). \tag{20.7}$$

再来求它在尖点处的值. 仍由例 14.1(b)知，$\Gamma(2)$有三个不等价的正则尖点 $\mathrm{i}\infty, 0, 1$，宽度均为 2. 我们有

$$\theta_1^4(\mathrm{i}\infty) = 1.$$

利用式(20.5′)可得

$$\theta_1^4(0) = \theta_1^4 \circ [S]_2(\mathrm{i}\infty) = -\theta_1^4(\mathrm{i}\infty) = -1.$$

再利用式(20.6)和(20.4)得到

$$\begin{aligned}
\theta_1^4 \circ [TS]_2(z) &= z^{-2}\{2\theta_4(-1/z) - \theta_1(-1/z)\}^4 \\
&= z^{-2}\{2\theta_1(-4/z) - \theta_1(-1/z)\}^4 \\
&= z^{-2}\{2\sqrt{z/4\mathrm{i}}\;\theta_1(z/4) - \sqrt{z/\mathrm{i}}\;\theta_1(z)\}^4 \\
&= -\{\theta_1(z/4) - \theta_1(z)\}^4,
\end{aligned}$$

因而有

$$\theta_1^4(1) = \theta_1^4 \circ [TS]_2(\mathrm{i}\infty) = 0.$$

这就证明了所要的结论.

例 20.2 设 Theta 群 Γ_θ 由式(11.48)给出. 则有

(i) $\theta_1^8 \in M_4(\Gamma_\theta)$;

(ii) $\theta_1^4 \in M_2(\Gamma_\theta, \chi)$，即

$$\theta_1^4 \circ [\sigma]_2 = \chi(\sigma)\theta_1^4, \quad \sigma \in \Gamma_\theta,$$

其中 χ 是 $\Gamma(2)\backslash\Gamma_\theta$ 的非主特征，即

$$\chi(\sigma) = 1, \ \sigma \in \Gamma(2); \quad \chi(\sigma) = -1, \ \sigma \in \Gamma(2)S.$$

已知 $\Gamma_\theta = \Gamma(2)(I \cup S)$，以及由例 14.1(c)知，$\Gamma_\theta = \{S, T^2\}$，它有两个正则尖点：i∞，1. 由例 20.1 知，$\theta_1^4(i\infty)=1$，$\theta_1^4(1)=0$，以及由式(20.7)和(20.5′)可得

$$\theta_1^4 \circ [\sigma]_2 = \theta_1^4, \quad \sigma \in \Gamma(2);$$

$$\theta_1^4 \circ [\sigma]_2 = \theta_1^4 \circ [S]_2 = -\theta_1^4, \quad \sigma \in \Gamma(2)S.$$

这就证明了(ii). 由此即推出(i)(也可直接证明).

例 20.3 证明：(i) $\theta_2^4 \in M_2(\Gamma_0(4))$；(ii) $\theta_2^2 \in M_1(\Gamma_1(4)) = M_1(\Gamma_0(4), \chi)$，$\chi$ 是模 4 的非主特征.

由例 20.1 及例 15.2 立即推出 $\theta_1^4 \circ [B_{(2)}]_2 \in M_2(\Gamma_1(4))$，由此及式(20.3)和 $\Gamma_0(4)=\Gamma_1(4)(I \cup -I)$就证明了(i). 下面来证(ii). 显见，(i)是(ii)的直接推论. 由例 14.3(a)知 $\Gamma_1(4) = \{T, ST^4S^{-1}\}$. 由式(20.2)知，只要对生成元 ST^4S^{-1}来验证. 由式(20.4)可得

$$\theta_2(-1/4z) = \sqrt{2z/\mathrm{i}}\ \theta_2(z). \tag{20.8}$$

因而有

$$\theta_2^2 \circ [W_{(4)}]_1 = -\mathrm{i}\theta_2^2. \tag{20.9}$$

利用常用的关系式

$$ST^lS^{-1} = W_{(l)}TW_{(l)}^{-1}, \tag{20.10}$$

即得

$$\theta_2^2 \circ [ST^4S^{-1}]_1 = \theta_2^2 \circ [W_{(4)}TW_{(4)}^{-1}]_1$$
$$= -\mathrm{i}\theta_2^2[TW_{(4)}^{-1}]_1 = -\mathrm{i}\theta_2^2 \circ [W_{(4)}^{-1}]_1 = \theta_2^2.$$

这样，由(i)推出(ii)成立(为什么). 下面具体来求尖点处的值. $\Gamma_1(4)$有两个正则尖点 i∞，0，及一个非正则尖点 $-1/2$(见例14.3(a)). 已知 $\theta_2^2(i\infty)=1$，以及由式(20.4)可得

$$\theta_2^2 \circ [S]_1(z) = (1/2\mathrm{i})\theta_2^2(z/4), \tag{20.11}$$

所以，$\theta_2^2(0)=1/2\mathrm{i}$. 由性质 15.13 知 $\theta_2^2(-1/2)=0$. 这也可通过求 $\theta_2^2 \circ [ST^2S^{-1}]_1$ 来得到(留给读者).

下面来讨论由 Dedekind η 函数导出的例子. 我们记

$$\eta_n(z) = \eta(nz), \quad \eta_1(z) = \eta(z), \quad z \in \boldsymbol{H}. \tag{20.12}$$

已知(见式(6.11))

$$\eta(-1/z) = \sqrt{z/\mathrm{i}}\ \eta(z), \quad z \in \boldsymbol{H}, \sqrt{1} = 1; \tag{20.13}$$

$$\eta^2 \circ [S]_1 = -\mathrm{i}\eta^2, \quad \eta^4 \circ [S]_2 = -\eta^4, \tag{20.14}$$

及(见式(15.35)和(17.6))

$$\eta^{24} = (2\pi)^{-12}\Delta \in S_{12}(\Gamma). \tag{20.15}$$

此外,我们有

$$\eta_1^l \circ [B_{(n)}]_k = n^{2/k}\eta_n^l, \quad l \in \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{N}. \tag{20.16}$$

例 20.4 设 N 是正整数. (i) $(\eta\eta_N)^{24} \in S_{24}(\Gamma_0(N))$; (ii) 设 k, N 是正整数,满足 $k(N+1)=24$. 那么,当 $k=2,4,6,8,12$ 时,$(\eta\eta_N)^k \in S_k(\Gamma_0(N))$; (iii) 在(ii)的条件下,若 $f \in S_k(\Gamma_0(N))$,则必有复数 c 使得 $f=c(\eta\eta_N)^k$,即 $S_k(\Gamma_0(N))$的维数等于 1.

利用式(20.16),(20.15)及例 15.1 推出 $\eta_N^{24}=\eta^{24}\circ[B_{(N)}]_{12} \in S_{12}(\Gamma_0(N))$. 由此及式(20.15)就证明了(i). 下面来证(ii). 当 $k(N+1)=24$ 时,由式(6.8)可得

$$g_N(z) = (\eta(z)\eta_N(z))^k = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz})(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}Nnz})\right\}^k. \tag{20.17}$$

所以,$g_N(z)$是 $\boldsymbol{H}$ 上的解析函数. 当 $k=12$ 时,$N=1$,由式(20.15)知结论成立,在其他情形,相应的值 N 为

k	8	6	4	2
N	2	3	5	11

$k=4$ 的情形较复杂,在最后讨论. 先讨论其他三种情形. 我们有

$$\Gamma_0(N) = \{-I, T, ST^NS^{-1}\}, \quad N = 2,3,11. \tag{20.18}$$

(见例 14.1(a),例 14.2(a),$N=11$ 的证明留给读者). 显然有,

$$g_N \circ [-I]_k = g_N \circ [T]_k = g_N.$$

所以只要验证 ST^NS^{-1}. 当 $k=8,6,4$ 及 2 时,利用式(20.13)得

$$g_N \circ [W_{(N)}]_k(z) = \{\eta^k \circ [W_{(N)}]_{k/2}(z)\}\{\eta_N^k \circ [W_{(N)}]_{k/2}(z)\}$$

$$= \left\{ N^{k/4}(Nz)^{-k/2}\eta^k\left(\frac{-1}{Nz}\right)\right\}\left\{N^{k/4}(Nz)^{-k/2}\eta_N^k\left(\frac{-1}{Nz}\right)\right\}$$

$$= N^{-k/2}z^{-k}\{(\sqrt{Nz/\mathrm{i}})^k\eta^k(Nz)\}\{(\sqrt{z/\mathrm{i}})^k\eta^k(z)\}$$

$$= \mathrm{i}^{-k}g_N(z). \tag{20.19}$$

由此及式(20.10)即得：当 $k=8,6,4$ 及 2 时有

$$g_N \circ [ST^NS^{-1}]_k = g_N \circ [W_{(N)}TW_{(N)}^{-1}]_k = g_N. \tag{20.20}$$

由式(20.18)及(20.20)就证明了：当 $\{k,N\}=\{8,2\},\{6,3\}$ 及 $\{2,11\}$ 时有

$$g_N \circ [\sigma]_k = g_N, \quad \sigma \in \Gamma_0(N). \tag{20.21}$$

当 $k(N+1)=24$ 时，由(i)知

$$(g_N \circ [\sigma]_k)^{N+1} = (\eta\eta_N)^{24} \circ [\sigma]_{24} = \eta\eta_N^{24}, \quad \sigma \in \Gamma. \tag{20.22}$$

由此即推出 g_N 在尖点处的值均为零. 这就证明了所要结论.

下面来讨论 $\{k,N\}=\{4,5\}$ 的情形. 这时有(见例 14.3(a))

$$\Gamma_0(5) = \{-I,T,ST^5S^{-1},ST^{-2}S(ST^{-2})^{-1},ST^2S(ST^2)^{-1}\}.$$

由以上讨论知，为证明式(20.21)对 $\{k,N\}=\{4,5\}$ 成立只要证明

$$g_5 \circ [ST^{\mp 2}S(ST^{\mp 2})^{-1}]_4 = g_5. \tag{20.23}$$

下面来证其中一个，另一结论完全类似. 容易算出

$$\alpha = ST^{-2}S(ST^{-2})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$

因而有

$$g_5 \circ [\alpha]_4(z) = (5z-2)^{-4}\eta^4\left(\frac{2z-1}{5z-2}\right)\eta^4\left(\frac{2(5z)-5}{(5z)-2}\right).$$

利用 $\eta(z)$ 在模变换下的一般函数方程(见式(15.77))可得

$$\eta^4\left(\frac{2z-1}{5z-2}\right) = \eta^4(z)(5z-2)^2\mathrm{e}^{4\varepsilon(2,-1,5,-2)},$$

$$\eta^4\left(\frac{2(5z)-5}{(5z)-2}\right) = \eta^4(5z)(5z-2)^2\mathrm{e}^{4\varepsilon(2,-5,1,-2)},$$

其中

$$\varepsilon(2,-1,5,-2) = -\pi\mathrm{i}\,s(-2,5) - \pi\mathrm{i}/4,$$

$$\varepsilon(2,-5,1,-2) = -\pi\mathrm{i}\,s(-2,1) - \pi\mathrm{i}/4.$$

由 Dedekind 和的定义(见式(15.75))，容易算出 $s(-2,1)=$

$s(-2,5)=0$. 由此及以上五式就推出式(20.23)中相应的一式成立. 进而,由此及式(20.22)就证明了所要的结论.

最后来证(iii). 由于 $g_N(z)$在 $\boldsymbol{H}$ 内不等于零,所以 f/g_N 在 $\boldsymbol{H}$ 内解析,且属于 $V_0(\Gamma_0(N))$. 因此,只要证明 f/g_N 在 $\Gamma_0(N)$的尖点处是解析的,即 $f/g_N\in M_0(\Gamma_0(N))$,由定理 17.2 就推出所要结论. $N=1,k=12$ 的情形是显然的. 当 $N=2,3,5$ 及 11 时,由定理 12.6 (i)知,$\Gamma_0(N)$有两个不等价的尖点: ∞和 0. 由式(20.17)知,g_N 在尖点∞的 Fourier 展式是

$$e^{2\pi iz}+\sum_{m=2}^{\infty}a_m e^{2\pi imz}.$$

由 $T\in\Gamma_0(N)$知,$f\in S_k(\Gamma_0(N))$在尖点∞处的 Fourier 展式是

$$\sum_{m=1}^{\infty}b_m e^{2\pi imz}.$$

故 f/g_N 在尖点∞处解析. f/g_N 在尖点 0 处的性质就是$(f/g_N)\circ[S]_0$ 在尖点∞处的性质(见 § 15 的讨论). 我们有

$$(f/g_N)\circ[S]_0=(f\circ[S]_k)/(g_N\circ[S]_k).$$

所以,就归结为讨论 $f\circ[S]_k$ 和 $g_N\circ[S]_k$ 在尖点∞处的性质. 它们分别是 $S^{-1}\Gamma_0(N)S=\Gamma^0(N)$的尖形式,由于 $T^N\in\Gamma^0(N)$,所以它们的 Fourier 展式必为

$$\sum_{m=1}^{\infty}c_m e^{2\pi imz/N}$$

的形式(见 § 15). 利用式(20.13)和(20.17)易得 Fourier 展式:

$$\begin{aligned}g_N\circ[S]_k&=(i\sqrt{N})^{-k}(\eta(z/N)\eta(z))^k\\&=(i\sqrt{N})^{-k}e^{2\pi iz/N}+\sum_{m=2}^{\infty}d_m e^{2\pi imz/N}.\end{aligned}$$

由以上三式就推出 f/g_N 在尖点 0 处也是解析的. 证毕.

例 20.5 设 p 是素数. (i) $H(z)=(\eta^p/\eta_p)^{24}\in M_{12(p-1)}(\Gamma_0(p))$, 在尖点$\infty$处的值为 1,在尖点 0 处是 p^2-1 阶零点;(ii) 当 p 是奇素数时,$h(z)=(\eta^p/\eta_p)^6\in M_{3(p-1)}(\Gamma_0(p))$,在尖点$\infty$处的值为 1,在尖点 0 处是$(p^2-1)/4$ 阶零点;(iii) 当 p 是奇素数时,

$$(\eta^p/\eta_p)^3\in M_{3(p-1)/2}(\Gamma_0(p),\chi_1),$$

这里 χ_1 是模 p 的 Legendre 符号，

$$\chi_1(\sigma)=\left(\frac{d}{p}\right),\quad \sigma\equiv\begin{bmatrix}* & * \\ 0 & d\end{bmatrix}(\mathrm{mod}\ p)\in\Gamma_0(p).$$

先来讨论(i). 由式(6.8),(20.15)及例 15.1 知，

$$\eta^{24}(pz)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}pz}\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}npz})\right)^{24}\in S_{12}(\Gamma_0(p)),$$

$$\eta^{24p}(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}pz}\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz})\right)^{24p}\in S_{12}(\Gamma).$$

因此，$H(z)$在 $\boldsymbol{H}$ 内解析且属于 $V_{12(p-1)}(\Gamma_0(p))$. $\Gamma_0(p)$有两个不等价的尖点：∞和 0. 显然有 $H(\infty)=1$. 在尖点 0 处的性质就是 $H\circ[S]_{12(p-1)}$ 在尖点∞处的性质，它属于

$$V_{12(p-1)}(\Gamma^0(p))(S^{-1}\Gamma_0(p)S=\Gamma^0(p)).$$

类似例 20.4 中的讨论，利用式(20.15)及上式可得

$$\begin{aligned}H\circ[S]_{12(p-1)}(z)&=z^{-12(p-1)}\eta^{24p}(-1/z)/\eta^{24}(-p/z)\\&=p^{12}\eta^{24p}(z)/\eta^{24}(z/p)\\&=p^{12}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(p^2-1)z/p}\sum_{m=0}^{\infty}a_m\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mz/p}.\end{aligned}$$

由于 $\Gamma^0(p)$是 p 级同余子群，按约定 $H\circ[S]_{12(p-1)}$在尖点∞是 p^2-1 阶零点，因此，H 在尖点 0 处也是 p^2-1 阶零点(见 §15 的讨论). 这就证明了(i). (ii)的证明要用到将在定理 23.10(i)证明的一个结论：存在 $g(z)\in M_{3(p-1)}(\Gamma_0(p))$，它在尖点$\infty$处不等于零，及尖点 0 是它的$(p^2-1)/4$ 阶零点. 由此及(i)就推出

$$g^4/h^4=g^4/H\in M_0(\Gamma_0(p)).$$

进而，由定理 17.2 得到 g^4/h^4 为常数，即 g/h 为常数，这就证明了(ii). 由此也推出 $g(z)$在 $\boldsymbol{H}$ 内不等于零. 最后，来证明(iii)，这要用到将在定理 23.10(ii)中证明的结论：存在 $f\in M_{3(p-1)/2}(\Gamma_0(p),\chi_1)$使得 $g(z)=(-1)^{(p-1)/2}f^2(z)$. 由此推出$(\eta^p/\eta_p)^3$ 是 f 的常数倍. 证毕.

例 20.6　(i) 设 N 是正整数. 那么，$(\eta_N/\eta)^{24}\in A_0(\Gamma_0(N))$，尖点$\infty$是 $N-1$ 阶零点，尖点 0 是 $N-1$ 阶极点；(ii) 设 p 是素数，k 是正整数，满足 $k(p-1)=24$. 那么，$(\eta_p/\eta)^k\in A_0(\Gamma_0(p))$，尖点$\infty$是 1 阶零点，尖点 0 是 1 阶极点.

(i)的证明与例 20.4(i),例 20.5(i)的证法完全一样,留给读者. 下面来证(ii). 数对$\{p,k\}=\{2,24\},\{3,12\},\{5,6\},\{7,4\}$及$\{13,2\}$. 关键在于证明

$$(\eta_p/\eta)^k\circ[\sigma]_0=(\eta_p\circ[\sigma]_0/\eta\circ[\sigma]_0)^k=(\eta_p/\eta)^k,\quad \sigma\in\Gamma_0(p). \tag{20.24}$$

由此及(i)就证明了(ii)(为什么). 我们利用 η 函数的一般函数方程(15.77)来证明上式. 设

$$\sigma=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in\Gamma_0(p).$$

当 $c=0$ 时,容易验证式(20.24)成立. 由于$-I\in\Gamma_0(p)$,所以可假定 $c>0$. 由式(15.77)知

$$\eta\circ[\sigma]_0=\eta(\sigma(z))=\mathrm{e}^{\varepsilon(\sigma)}\sqrt{cz+d}\;\eta(z),$$

$$\varepsilon(\sigma)=\frac{\pi\mathrm{i}}{12}\frac{a+d}{c}-\pi\mathrm{i}\,s(d,c)-\frac{\pi\mathrm{i}}{4};$$

以及

$$\eta_p\circ[\sigma]_0=\eta(p\sigma(z))=\eta\left(\frac{a(pz)+pb}{c'(pz)+d}\right)$$
$$=\mathrm{e}^{\varepsilon(\sigma')}\sqrt{cz+d}\;\eta(pz),$$

其中 $c=c'p$,

$$\varepsilon(\sigma')=\frac{\pi\mathrm{i}}{12}\frac{a+d}{c'}-\pi\mathrm{i}\,s(d,c')-\frac{\pi\mathrm{i}}{4}.$$

综合以上讨论得到

$$(\eta_p/\eta)^k\circ[\sigma]_0=\mathrm{e}^{k(\varepsilon(\sigma')-\varepsilon(\sigma))}(\eta_p/\eta).$$

我们有

$$k(\varepsilon(\sigma')-\varepsilon(\sigma))=\pi\mathrm{i}k\left\{\left(s(d,c)-\frac{a+d}{12c}\right)-\left(s(d,c')-\frac{a+d}{12c'}\right)\right\}$$
$$=\pi\mathrm{i}kT. \tag{20.25}$$

可以证明在所讨论的 p,k 的取值下,kT 是偶数. 由此及前一式就推出所要的结论. 关于 kT 是偶数的证明将安排在问题 11~14.

§ 21 Petersson 内积

在 § 19 已指出同余子群 Γ' 的权为 k 的全体模形式 $M_k(\Gamma')$ 是复数域上的有限维线性空间，在 § 10 中，我们在完全复平面 C^* 上引进了在辛变换下不变的度量——辛测度. 大家知道，在线性空间中如果能定义内积，那么，对研究这空间是很有好处的，因为 Hilbert 内积空间有许多十分重要的性质. 本节就是要利用 § 10 中引进的辛面积元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y/y^2$ 来定义 $M_k(\Gamma')$ 中的内积.

定义 21.1 设 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 是同余子群，

$$f,g\in M_k(\Gamma'),\quad \mathscr{F}'=\mathscr{F}^*(\Gamma')$$

是 Γ' 的基本区域，$z=x+\mathrm{i}y$. 我们把积分

$$([\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma'}])^{-1}\int_{\mathscr{F}'}f(z)\,\overline{g(z)}y^k\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}\tag{21.1}$$

称为是 f 和 g 的 **Petersson 内积**，记作

$$\langle f,g\rangle=\langle f,g\rangle_{\Gamma'}.\tag{21.2}$$

式(21.2)中的第二个记号是为了强调这是在 $M_k(\Gamma')$ 中的内积，但我们马上要证明这样定义的内积——前面乘以因子 $([\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma'}])^{-1}$ ——是和 Γ' 的取法无关.

在定义中并没有要求收敛性，在证明满足什么条件积分收敛之前，先来讨论这样定义的内积具有的性质. 以下符号同定义 21.1.

性质 21.1 内积的面积元是 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y/y^2$，它在辛变换 $\alpha\in\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{R})$ 下是不变的，即设

$$w=\alpha(z),\quad w=u+\mathrm{i}v,\tag{21.3}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{v^2}=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2},\quad 及\quad \int_{\mathscr{D}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}=\int_{\alpha(\mathscr{D})}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{v^2}.$$

这就是式(10.3).

性质 21.2 内积的被积函数是 $f(z)\overline{g(z)}y^k$，而不是 $f(z)\overline{g(z)}$. 在辛变换(21.3)下，我们有

$$(f\circ[\alpha]_k)(z)\,\overline{(g\circ[\alpha]_k)(z)}y^k=f(w)\,\overline{g(w)}v^k.\tag{21.4}$$

特别的，当 $f,g\in M_k(\Gamma')$，$\alpha\in\Gamma'$时，在模变换 α 下被积函数不变，即有

$$f(z)\,\overline{g(z)}y^k=f(w)\,\overline{g(w)}v^k,\quad w=\alpha(z).\qquad(21.5)$$

证　由式(5.19)及 $y=\mathrm{Im}z=|j(z;\alpha)|^2\mathrm{Im}w$ 立即推出.

性质 21.3　内积和基本区域 $\mathscr{F}'$的取法无关，即若 G'也是 Γ'的基本区域，则有

$$([\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma}'])^{-1}\int_{\mathscr{F}'}f(z)\,\overline{g(z)}y^k\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}$$
$$=([\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma}'])^{-1}\int_{G'}f(z)\,\overline{g(z)}y^k\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}.\qquad(21.6)$$

证　我们仅讨论以下的常用情形：即 $\mathscr{F}'$可分为若干区域的并

$$\mathscr{F}'=\mathscr{F}_1'\cup\cdots\cup\mathscr{F}_l',$$

及存在 $\sigma_1,\cdots,\sigma_l\in\Gamma'$，使得

$$G'=\sigma_1\mathscr{F}_1'\cup\cdots\cup\sigma_l\mathscr{F}_l'.$$

由性质 21.1 及式(21.5)知：作变换 $w=\sigma_j(z)$后有

$$\int_{\mathscr{F}_j'}f(z)\,\overline{g(z)}y^k\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}=\int_{\sigma_j\mathscr{F}_j'}f(w)\,\overline{g(w)}v^k\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{v^2},$$

两边对 j 求和即得所要结论.

性质 21.4　我们有

$$\langle g,f\rangle=\overline{\langle f,g\rangle},\qquad(21.7)$$

$$\langle f,c_1g_1+c_2g_2\rangle=\bar{c}_1\langle f,g_1\rangle+\bar{c}_2\langle f,g_2\rangle,\quad c_1,c_2\in\boldsymbol{C},\qquad(21.8)$$

及

$$\langle c_1f_1+c_2f_2,g\rangle=c_1\langle f_1,g\rangle+c_2\langle f_2,g\rangle,\quad c_1,c_2\in\boldsymbol{C}.\qquad(21.9)$$

证明留给读者.

性质 21.5　内积和所取的同余子群无关，即若有 $f,g\in M_k(\Gamma')$及 $f,g\in M_k(\Gamma'')$，则

$$\langle f,g\rangle_{\Gamma'}=\langle f,g\rangle_{\Gamma''}.$$

证　我们只要讨论 $\Gamma'\subseteq\Gamma''$的情形(为什么). 设

$$\overline{\Gamma}'' = \bigcup_{j=1}^{K} \overline{\Gamma}'\alpha_j, \quad K = [\overline{\Gamma}'' : \overline{\Gamma}'], \tag{21.10}$$

$\mathscr{F}''$和 $\mathscr{F}'$分别是 $\overline{\Gamma}''$和 $\overline{\Gamma}'$的基本区域. 由定理 13.1,性质 21.3 可得

$$\langle f,g\rangle_{\Gamma'} = [\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}']^{-1}\sum_{j=1}^{K}\int_{\alpha_j\mathscr{F}''} f(z)\,\overline{g(z)}y^k\,\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}$$

$$= [\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}']^{-1}K\int_{\mathscr{F}''} f(z)\,\overline{g(z)}y^k\,\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}. \tag{21.11}$$

由此及$[\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}'] = K[\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}'']$即得所要结论.

在性质 21.5 中取 $\Gamma''=\Gamma, f=g\equiv 1\in M_0(\Gamma')\subseteq M_0(\Gamma)$,利用定理 10.1 就得到

性质 21.6 记 Γ'的基本区域的辛面积是 $\mu(\Gamma')$,我们有

$$\mu(\Gamma') = [\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}']\mu(\Gamma) = (\pi/3)[\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}'].$$

现在来证明收敛性定理.

定理 21.7 设 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 是同余子群,$f,g\in M_k(\Gamma')$,且 f 和 g 中至少有一个是尖形式. 那么,由式(21.1)给出的积分绝对收敛,即 f 和 g 的 Petersson 内积$\langle f,g\rangle$存在.

证 不妨设 f 是尖形式,式(21.10)成立(取 $\Gamma''=\Gamma$),及 $\mathscr{F}^*$是由式(9.8)给出的 Γ 的基本区域. 这样,由式(21.11)的第一式($\Gamma''=\Gamma$) 得

$$\langle f,g\rangle_{\Gamma'} = K^{-1}\sum_{j=1}^{K}\int_{\alpha_j\mathscr{F}^*} f(z)\,\overline{g(z)}y^k\,\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} = K^{-1}\sum_{j=1}^{K} I_j.$$

我们来证每个 I_j 绝对收敛. 作变换 $w=\alpha_j^{-1}(z)$,由式(21.4)得

$$I_j = \int_{\mathscr{F}^*} f\circ[\alpha_j^{-1}]_k(w)\,\overline{g\circ[\alpha_j^{-1}]_k(w)}v^k\,\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{v^2}.$$

设

$$\mathscr{F}_0^* = \{w : w\in\mathscr{F}^*,\ \mathrm{Im}w\leqslant 2\},$$

$$\mathscr{F}_1^* = \mathscr{F}^*\backslash\mathscr{F}_0^* = \{w : \mathrm{Im}w\geqslant 2,\ -1/2\leqslant\mathrm{Re}w < 1/2\}.$$

我们有

$$I_j = \int_{\mathscr{F}_0^*} + \int_{\mathscr{F}_1^*}.$$

$\mathscr{F}_0^*$ 是一不包含尖点的有限闭区域,第一个积分当然绝对收敛. 下面

来讨论第二个积分. $f\circ[\alpha_j^{-1}]_k$ 和 $g\circ[\alpha_j^{-1}]_k$ 属于 $M_k(\alpha_j\Gamma'\alpha_j^{-1})$,且前者是尖形式. 设它们在尖点$\infty$的 Fourier 展式是:

$$f\circ[\alpha_j^{-1}]_k(w)=\sum_{l=1}^{\infty}a_l e^{2\pi i lw/q},\qquad g\circ[\alpha_j^{-1}](w)=\sum_{j=0}^{\infty}b_j e^{2\pi i jw/q}$$

(为什么可取同一个 q). 它们当 $v=\mathrm{Im}w\geqslant 1$ 时都绝对一致收敛(为什么). 因而有

$$|f\circ[\alpha_j^{-1}]_k(w)\overline{g\circ[\alpha_j^{-1}]_k(w)}|\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}c_m e^{-2\pi mv/r},$$

$$c_m=\sum_{\substack{l+j=m\\ l\geqslant 1,j\geqslant 0}}|a_l b_j|,$$

最后的正项级数当 $v\geqslant 1$ 时一致收敛. 由此即得

$$\left|\int_{\mathscr{F}_1^*}f\circ[\alpha_j^{-1}]_k(w)\overline{g\circ[\alpha_j^{-1}]_k(w)}v^k\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{v^2}\right|$$

$$\leqslant\int_{\mathscr{F}_1^*}\sum_{m=1}^{\infty}c_m e^{-2\pi mv/q}v^{k-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{d}u\int_2^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c_m e^{-2\pi mv/q}v^{k-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\left(\sum_{m=1}^{\infty}c_m e^{-2\pi m/q}\right)\int_2^{\infty}e^{-2\pi m(v-1)/q}v^{k-2}\mathrm{d}v<+\infty,$$

即这积分也绝对收敛. 所以,每个积分 I_j 绝对收敛. 证毕.

有了内积,就可以引进正交的概念.

定义 21.2　设 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 是同余子群, $f,g\in M_k(\Gamma')$. 若 $\langle f,g\rangle=0$, 则称 f 和 g **是正交的**.

由式(21.8)知, f 和 g 正交即 g 和 f 正交. 容易证明,只要在 Γ' 的每个尖点上 f 和 g 至少有一个的值为零,则定理 21.7 就成立,即内积 $\langle f,g\rangle$ 存在. 由定理 21.7,定理 19.1 及线性代数理论立即可得以下两个定理(证明留给读者).

定理 21.8　设 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 是同余子群. 则尖形式空间 $S_k(\Gamma')$ 是有限维 Hilbert 内积空间,内积 $\langle f,g\rangle$ 由式(21.1)定义,且 $S_k(\Gamma')$ 一定存在一组正交基.

定理 21.9　设 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 是同余子群. 定义

$$N_k(\Gamma')=\{f:f\in M_k(\Gamma'),\langle f,g\rangle=0,\text{对任意的 }g\in S_k(\Gamma')\},\tag{21.12}$$

即 $N_k(\Gamma')$是 $M_k(\Gamma')$中与 $S_k(\Gamma')$正交的全体模形式所组成的子集合. 那么,$N_k(\Gamma')$是 $M_k(\Gamma')$的子空间,称为 $S_k(\Gamma')$**的正交补空间**,且有直和分解

$$M_k(\Gamma') = S_k(\Gamma') \oplus N_k(\Gamma'). \tag{21.13}$$

下面的定理是内积的重要性质.

定理 21.10　设 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 是同余子群,$f,g\in M_k(\Gamma')$,且至少有一个是尖形式,以及

$$\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{Q}). \tag{21.14}$$

那么有

$$\langle f\circ[\alpha]_k,\ g\circ[\alpha]_k\rangle = \langle f,g\rangle, \tag{21.15}$$

及

$$\langle f\circ[\alpha]_k, g\rangle = \langle f, g\circ[\tilde{\alpha}]_k\rangle, \tag{21.16}$$

其中

$$\tilde{\alpha} = |\alpha|\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{21.17}$$

一般的,对任意的 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\in\Gamma'$,有

$$\begin{aligned}\langle f\circ[\gamma_1\alpha\gamma_2]_k,\ g\rangle &= \langle f\circ[\alpha]_k,\ g\rangle = \langle f,\ g\circ[\tilde{\alpha}]_k\rangle \\ &= \langle f,\ g\circ[\gamma_3\,\tilde{\alpha}\,\gamma_4]_k\rangle.\end{aligned} \tag{21.18}$$

证　设 $\Gamma''=\Gamma'\cap(\alpha^{-1}\Gamma'\alpha)$,$\mathscr{F}''$是 Γ''的基本区域. 显然有 $f\circ[\alpha]_k$, $g\circ[\alpha]_k\in M_k(\Gamma'')$,它们的内积

$$\langle f\circ[\alpha]_k, g\circ[\alpha]_k\rangle = \frac{1}{[\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma}'']}\int_{\mathscr{F}''} f\circ[\alpha]_k(z)\,\overline{g\circ[\alpha]_k(z)}\,y^k\,\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}.$$

作变换 $w=\alpha(z)$,利用性质 21.1 和性质 21.2 得到

$$\langle f\circ[\alpha]_k, g\circ[\alpha]_k\rangle = \frac{1}{[\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma}'']}\int_{\alpha\mathscr{F}''} f(w)\,\overline{g(w)}\,v^k\,\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{v^2}.$$

注意到 $\Gamma'''=\alpha\Gamma''\alpha^{-1}=\alpha\Gamma'\alpha^{-1}\cap\Gamma'\subseteq\Gamma'$,及 Γ'''的基本区域是 $\alpha\mathscr{F}''$(为什么),所以由性质 21.5 及上式得

$$\langle f\circ[\alpha]_k, g\circ[\alpha]_k\rangle = \frac{[\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma}''']}{[\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma}'']}\langle f,g\rangle.$$

由性质 21.1 知 $\mu(\Gamma'')=\mu(\Gamma''')$,由此及性质 21.6,从上式就推得式

(21.15).

在式(21.15)中，以 $g\circ[\alpha^{-1}]_k$ 代替 g，以 $\Gamma'\cap(\alpha\Gamma'\alpha^{-1})$ 代替 Γ'，就得到

$$\langle f\circ[\alpha]_k, g\rangle = \langle f, g\circ[\alpha^{-1}]_k\rangle. \tag{21.19}$$

由此及 $g\circ[\alpha^{-1}]_k=g\circ[\tilde{\alpha}]_k$ 就推出式(21.16). 式(21.18)的证明留给读者.

问　　题

1. 设 h 是正整数，$2h\mid N$，$N\geqslant 4$. 再设

$$\Gamma' = \left\{\alpha:\ \alpha\in\Gamma, \text{存在整数 } j \text{ 使得 } \alpha\equiv\begin{bmatrix}-1 & -h\\ 0 & -1\end{bmatrix}^j \pmod N\right\}.$$

证明：∞是 Γ' 的非正则尖点.

2. 设 p 是素数. 求同余子群(i) $\Gamma_0(p)$；(ii) $\Gamma_0(p^2)$的尖点，及它们的宽度.

3. 设 k 是正整数，

$$f(z+1)=f(z)\quad 及\quad f(-1/4z)=(-4z^2)^k f(z).$$

证明：$f\circ[\gamma]_{2k}=f$，$\gamma\in\Gamma_0(4)$.

4. (i) 证明：$\eta^8(4z)\eta^{-4}(2z)\in M_2(\Gamma_0(4))$，并求其在尖点处的值；

(ii) 设 a 为整数. 证明：

$$E_2(ST^{-a}S^{-1}z) = (az+1)^2E_2(z) - \frac{6ai}{\pi}(az+1);$$

(iii) 证明：$F(z)=-\dfrac{1}{24}\{E_2(z)-3E_2(2z)+2E_2(4z)\}$属于 $M_2(\Gamma_0(4))$，并求其在尖点处的值(参看第二章问题 7)；

(iv) 证明：$F(z)=\eta^8(4z)\eta^{-4}(2z)$，及

$$q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})^4(1+q^{2n})^4 = \sum_{2\nmid n>0}\sigma_1(n)q^n,\quad q=e^{2\pi iz};$$

(v) 设正整数 $N\geqslant 2$. 证明：$E_2(z)-\dfrac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}E_2(z+jN)$属于 $M_2(\Gamma_0(N^2))$. 由此给出 $F(z)\in M_2(\Gamma_0(4))$的另一证明.

5. (i) 证明：$F(z)$(定义见上题)和 $\theta_2^4(z)$是线性独立的；

(ii) 证明：$\eta^{20}(2z)\eta^{-8}(z)\eta^{-8}(4z)\in M_2(\Gamma_0(4))$，并求其尖点处的值；

(iii) 证明：$\theta_2(z)=\eta^5(2z)\eta^{-2}(z)\eta^{-2}(4z)$；

(iv) 证明：$\theta_2(z)=e^{-2\pi i/24}\eta^2(z+1/2)\eta^{-1}(2z)$.

6. (i) 设 $N=7,23$，$k=24/(N+1)$，以及 $\chi(n)=\left(\frac{n}{N}\right)$——Jacobi 符号. 证明：$S_k(\Gamma_0(N),\chi)$中的任意一个非零元素必是$(\eta(z)\eta(Nz))^k$ 的常数倍；

(ii) 证明：$(\eta(z)\eta(7z))^3\in S_3(\Gamma_0(7),\chi)$.

7. (i) 利用定理 16.2 求出 $\theta_2^4(z)$及 $F(z)$(定义见第 4 题)的所有零点；

(ii) 证明：$\theta_2^4(z)$，$F(z)$是 $M_2(\Gamma_0(4))$的一组基；

(iii) 设 k 是非负偶数. 证明：$f\in M_k(\Gamma_0(4))$可表为 F 和 θ_2^4 的 $k/2$ 次齐次多项式；

(iv) 证明：$S_6(\Gamma_0(4))$的维数等于 1，由 $\theta_2^8F-16\theta_2^4F^2$ 生成；

(v) 证明：$\eta^{12}(2z)\in S_6(\Gamma_0(4))$，但不属于 $S_6(\Gamma_0(2))$，且有

$$\eta^{12}(2z)=\theta_2^8F-16\theta_2^4F^2;$$

(vi) 设偶数 $k\geqslant 6$. 证明：任意的 $f\in S_k(\Gamma_0(4))$必可表为 F 和 θ_2^4 的 $k/2$ 次齐次多项式，且它一定被 $\theta_2^8F-16\theta_2^4F^2$ 整除.

8. (i) 利用第 7 题结论(ii)，求矩阵 B 满足

$$\begin{bmatrix}\theta_2^4\circ[W_{(4)}]_2\\ F\circ[W_{(4)}]_2\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}\theta_2^4\\ F\end{bmatrix};$$

(ii) 证明 $M_2^+(\Gamma_0(4),\chi^0)$，$M_2^-(\Gamma_0(4),\chi^0)$(见第五章第 7 题)的维数均为 1，其中 χ^0 为模 4 的主特征；

(iii) 求 $M_2(\Gamma_0(4))$的一组基，它们是 B 的特征形式.

9. (i) 设 $f\in M_k(\Gamma_0(N),\chi_1)$，$g\in M_k(\Gamma_0(N),\chi_2)$. 证明：

$$fg\in M_{k+h}(\Gamma_0(N),\chi_1\chi_2);$$

(ii) 设 χ 是模 4 的非主特征，即

$$\chi(n)=(-1)^{(n-1)/2},\quad 2\nmid n.$$

证明：$M_1(\Gamma_0(4),\chi)$中的任一元素必为 θ_2^2 的常数倍；

(iii) χ 的定义同(ii)，求 $S_k(\Gamma_1(4))=S_k(\Gamma_0(4),\chi^k)$的维数；

(iv) 设 $f(z)=\eta^8(z)\eta^8(2z)$，$g(z)=f(2z)$. 证明：f 和 g 是 $S_8(\Gamma_1(4))$ 的一组基.

10. (i) 设 $N=2,3,5,11$，$k=24/(N+1)$. 证明：$S_k(\Gamma_0(N))$的维数为 1，由$(\Delta(z)\Delta(Nz))^{1/(N+1)}=(\eta(z)\eta(Nz))^k$ 生成；

(ii) 设 $N=2,3,4,6,12$，$k=12/N$. 证明：$S_k(\Gamma(N))$的维数为 1，由$(\Delta(z))^{1/N}=(\eta(z))^{2k}$生成.

以下是一组关于 Dedekind 和 $s(h,m)$(定义见式(15.75))的习题，目的是为了证明式(20.25)右边的 kT 是偶数.

11. 证明：(a) 若 $h_1\equiv\pm h_2 \pmod m$，则 $s(h_1,m)=\pm s(h_2,m)$；

(b) 若 $hh'\equiv\pm 1 \pmod m$，则 $s(h,m)=\pm s(h',m)$；

(c) 若 $h^2+1\equiv 0 \pmod m$，则 $s(h,m)=0$.

12. 设 $l=(3,m)$. 证明：(a) $6m\,s(h,m)$是整数；

(b) $12hm\,s(m,h)\equiv 0 \pmod{lm}$；

(c) $12hm\,s(h,m)\equiv h^2+1 \pmod{lm}$；

(d) $s(h,m)=0$ 的充要条件是 $h^2+1\equiv 0 \pmod m$.

13. 证明：

$$12m\,s(h,m)\equiv(m-1)(m+2)-4h(m-1)+4\sum_{r<m/2}\left[\frac{2hr}{m}\right] \pmod 8.$$

当 m 是奇数时，则有

$$12m\,s(h,m)\equiv m-1+4\sum_{r<m/2}\left[\frac{2hr}{m}\right] \pmod 8.$$

14. 在例 20.6(ii)的条件和符号下，设 $l=(3,c)$，$l'=(3,c')$，证明：

(a) $12ac\left\{s(d,c)-\dfrac{a+d}{12c}\right\}\equiv -bc \pmod{lc}$；

(b) $12ac\left\{s(d,c')-\dfrac{a+d}{12c'}\right\}\equiv -pbc \pmod{l'c}$；

(c) $12ckT\equiv 0 \pmod{l'c}$；

(d) $12ckT\equiv 0 \pmod{3c}$；

(e) 设 c 是奇数，我们有

$$12ckT \equiv k(p-1) + k(p-1)(a+d) \equiv 0 \pmod 8,$$

进而推出 kT 是偶数；

(f) 设 c 是偶数，$c=2^r c_1$，$2\nmid c_1$，及 $a\geqslant 1$. 我们有

$$12cakT \equiv kcc'(p-1) + k(p-1)bc \equiv 0 \pmod{2^{r+3}},$$

进而推出 kT 是偶数；

(g) 当 c 是偶数，$a<0$ 时，亦有 kT 是偶数；

(h) 在所有情形下，kT 一定是偶数.

第七章　Poincaré 级数

Poincaré 级数是构造给定的同余子群的模形式的一种重要方法. 这就是本章要讨论的内容. 在 § 22, 讨论了同余子群的 Poincaré 级数的概念(非尖形式的 Poincaré 级数称为 Eisenstein 级数)及其基本性质, 以 $\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$, $\Gamma(N)$为例具体给出了它们的 Poincaré 级数. 特别是证明了 Poincaré 级数的完备性定理, 即给定的同余子群的模形式一定是它的 Poincaré 级数的有限线性组合. 在 § 23 和 § 24 分别讨论了同余子群 $\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$, $\Gamma(N)$的 Eisenstein 级数和 Poincaré 级数的性质及其 Fourier 展开. 虽然在理论上 Poincaré 级数有这样好的性质, 但实际上对它了解极少.

§ 22　Poincaré 级数及其基本性质

本节将介绍构造同余子群的模形式的一种重要方法, 即所谓 Poincaré 级数, 并讨论它的基本性质.

设 $\Gamma' \subseteq \Gamma$ 是同余子群, Γ'的尖点 $\mathrm{i}\infty$的宽度为 f, 再设 ν, m 是整数, $m \neq 0$,

$$\mathrm{e}_m^\nu(z) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\nu z/m}, \quad \mathrm{e}_m^1(z) = \mathrm{e}_m(z), \quad \mathrm{e}_1^1(z) = \mathrm{e}_m(z), \tag{22.1}$$

$\mathrm{e}_m^\nu(z)$简记为 e_m^ν. 容易验证(留给读者, 参看式(12.20)~(12.22)):

情形 A　当 $\mathrm{i}\infty$是 Γ'的正则尖点时, 取任意整数 k, 及 $\nu \geqslant 0$, 我们有

$$\mathrm{e}_f^\nu \in M_k(\Gamma'_\infty); \tag{22.2}$$

情形 B　当 $\mathrm{i}\infty$是 Γ'的非正则尖点时, 取任意整数 k, $2 \mid k$, 及 $\nu \geqslant 0$, 我们有

$$\mathrm{e}_f^\nu \in M_k(\Gamma'_\infty); \tag{22.2$'$}$$

情形 C　当 $\mathrm{i}\infty$是 Γ'的非正则尖点时, 取任意整数 k, $2 \nmid k$, 及

$\nu\geqslant 1, 2\nmid\nu$,我们有

$$e_{2f}^{\nu}\in S_k(\Gamma'_\infty). \tag{22.2''}$$

在本节中我们约定总取

$$q=\begin{cases} f, & \text{在情形 A 和 B},\\ 2f, & \text{在情形 C}.\end{cases} \tag{22.3}$$

由以上讨论知,对任意的 $\sigma\in\Gamma$ 及 $\alpha\in\Gamma'_\infty$ 总有

$$e_q^{\nu}\circ[\alpha\sigma]_k=e_q^{\nu}\circ[\sigma]_k, \tag{22.4}$$

即当 γ 属于同一个右陪集 $\Gamma'_\infty\sigma$ 时,$e_q^{\nu}\circ[\gamma]_k$ 是不变的. 因此,我们可以合理地引进

定义 22.1　设 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 是同余子群,k,ν 和 q 的取值满足情形 A,B,C 和式(22.3)的约定,定义级数

$$P_\nu(\Gamma',k)(z)=P_\nu(z;\Gamma',k)=\sum_{\sigma\in\Gamma'_\infty\backslash\Gamma'}e_q^{\nu}\circ[\sigma]_k(z), \tag{22.5}$$

这里的求和号表示对 Γ' 关于其子群 Γ'_∞ 的任一取定的右陪集分解代表系 $\Gamma'_\infty\backslash\Gamma'$ 求和. 这种级数称为**同余子群 Γ' 在尖点 $i\infty$ 处的权为 k、特征为 ν 的 Poincaré 级数**;当 $\nu=0$ 时,也称为**同余子群 Γ' 在尖点 $i\infty$ 处的权为 k 的标准 Eisenstein 级数**.

下面来证明收敛性定理.

定理 22.1　设 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 是同余子群. 那么,当 $k\geqslant 3$ 时,

(i) Poincaré 级数 $P_\nu(\Gamma',k)(z)$ 是 $\boldsymbol{H}$ 内的解析函数.

(ii)
$$P_0(\Gamma',k)\in M_k(\Gamma'), \tag{22.6}$$

及

$$\begin{aligned}&P_0(\Gamma',k)(i\infty)=1;\\ &P_0(\Gamma',k)(\zeta)=0,\quad \text{尖点 } \zeta \text{ 与 } i\infty \text{ 是 } \Gamma' \text{ 不等价的}.\end{aligned} \tag{22.7}$$

(iii)
$$P_\nu(\Gamma',k)\in S_k(\Gamma'),\quad \nu\geqslant 1; \tag{22.8}$$

(iv) 设 K 是性质 15.19 中给出的对称共轭变换,以及同余子群 Γ' 满足条件:

$$\sigma=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in\Gamma'\Longrightarrow\sigma'=\begin{bmatrix} a & -b\\ -c & d\end{bmatrix}\in\Gamma'. \tag{22.9}$$

那么,我们有

$$KP_\nu(\Gamma',k) = P_\nu(\Gamma',k), \quad \nu \geqslant 0, \qquad (22.10)$$

即

$$\overline{P_\nu(\Gamma',k)(-\bar{z})} = P_\nu(\Gamma',k)(z), \quad \nu \geqslant 0. \qquad (22.11)$$

因此,Poincaré 级数($\nu\geqslant0$)在尖点 $i\infty$处的 Fourier 展式的系数为实数.

证 首先要确定如何选取右陪集代表系.设

$$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma', \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \in \Gamma'.$$

容易验证:(a) 当$-I\in\Gamma'$或 $i\infty$是 Γ'的非正则尖点时,$\sigma_1\in\Gamma'_\infty\sigma$ 的充要条件是

$$c_1 = c, \quad d_1 = d, \text{或 } c_1 = -c, \quad d_1 = -d;$$

(b) 当$-I\notin\Gamma'$且 $i\infty$是 Γ'的正则尖点时,$\sigma_1\in\Gamma'_\infty\sigma$ 的充要条件是

$$c_1 = c, \quad d_1 = d.$$

因此,在情形(a),$\Gamma'_\infty\backslash\Gamma'$的右陪集代表系可取为

$$\left\{\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma': (c,d) = 1, c \geqslant 0, \text{及当 } c = 0 \text{ 时 } d = 1\right\}; \qquad (22.12)$$

在情形(b)可取为

$$\left\{\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma': (c,d) = 1\right\}, \qquad (22.13)$$

其中的 a,b 是当 c,d 取定后任意选定.现在来证(i).容易看出,对任意取定的实数 $x_1<x_2, y_0>0$,当 z 属于长条

$$x_1 \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant x_2, \quad \mathrm{Im}z \geqslant y_0 \qquad (22.14)$$

时,对任意不全为零的整数 m,n 有

$$|mz+n| \geqslant \min(1,y_0) = r(y_0) > 0.$$

利用证明引理 2.8 的方法(取 $\omega_1=z,\omega_2=1$),由以上讨论可推出:当 z 属于由式(22.14)给出的长条时有

$$|P_\nu(\Gamma',k)(z)| \leqslant \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{|mz+n|^k} \leqslant 8(r(y_0))^{-k}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{k-1}}.$$

因此,当 $k\geqslant3$ 时,$P_\nu(\Gamma',k)(z)$在长条(22.14)上绝对一致收敛.这就

证明了(i). 下面来证(ii). 由于对任意的 $\alpha\in\Gamma'$, $\{\sigma\}$和$\{\sigma\alpha\}$同时是 $\Gamma'_\infty\backslash\Gamma'$ 的右陪集代表系,所以当 $k\geqslant 3$ 时有

$$P_\nu(\Gamma',k)\circ[\alpha]_k=P_\nu(\Gamma',k),\quad \alpha\in\Gamma'.$$

我们还要讨论尖点处的性质. 当 $c\neq 0$ 时,对 $k\geqslant 1,\nu\geqslant 0$ 有

$$\mathrm{e}_q^\nu\circ[\sigma]_k(z)=\frac{\mathrm{e}^{2\pi i\nu\sigma(z)/q}}{(cz+d)^k}\to 0,\quad \mathrm{Im}z\to+\infty. \qquad (22.15)$$

注意到在由式(22.12)或(22.13)给出的右陪集代表系中,能取到 $c=0$ 的代表元只有一个,且可取定为 I. 因此,当 $k\geqslant 3$ 时,就推出(为什么)

$$P_\nu(\Gamma',k)(\mathrm{i}\infty)=\mathrm{e}_q^\nu(\mathrm{i}\infty)=\begin{cases}1, & \nu=0,\text{这仅在情形 A 和 B 出现};\\ 0, & \nu\geqslant 1.\end{cases}$$

若Γ'的尖点 ζ 和 $\mathrm{i}\infty$不等价,则有 $\gamma\in\Gamma,\gamma(\mathrm{i}\infty)=\zeta$,且对任意的 $\alpha\in\Gamma'$ 有 $\alpha(\mathrm{i}\infty)\neq\zeta$. 由定义知,当 $k\geqslant 3,\nu\geqslant 0$ 时有

$$\begin{aligned}P_\nu(\Gamma',k)(\zeta)&=P_\nu(\Gamma',k)\circ[\gamma]_k(\mathrm{i}\infty)\\&=\sum_{\sigma\in\Gamma'_\infty\backslash\Gamma'}\mathrm{e}_q^\nu\circ[\sigma\gamma]_k(z),\quad \mathrm{Im}z\to+\infty.\end{aligned}$$

注意到对任意的 $\sigma\in\Gamma'$,必有 $\sigma\gamma\neq\pm T^h$(为什么). 因此,上式右边的和式当 $\mathrm{Im}z\to+\infty$时极限为零(为什么),即

$$P_\nu(\Gamma',k)(\zeta)=0,\quad k\geqslant 3,\nu\geqslant 0.$$

综合以上讨论就证明了(ii),并也同时推出(iii). 最后来证明(iv). 注意到式(22.12),(22,13),由定义知

$$\overline{P_\nu(\Gamma',k)(z)}=\sum_{\sigma\in\Gamma'_\infty\backslash\Gamma'}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i\nu(-\sigma(\bar z))/q}}{((-c)(-\bar z)+d)^k},$$

且容易看出

$$-\sigma(\bar z)=\frac{a(-\bar z)+(-b)}{(-c)(-\bar z)+d}$$

以及
$$\left\{\sigma=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right\},\quad \left\{\sigma'=\begin{bmatrix}a & -b\\ -c & d\end{bmatrix}\right\}$$

必同为 $\Gamma_\infty\backslash\Gamma'$的右陪集代表系. 这样,由以上三式就得到

$$\overline{P_\nu(\Gamma',k)(z)}=P_\nu(\Gamma',k)(-\bar z).$$

这就证明了(iv)的最后一个结论(为什么). 证毕.

对同余子群 Γ'，由式(22.5)所定义的模形式——Poincaré 级数，当 $\nu=0$ 时(即 Eisenstein 级数)，具有由式(22.7)给出的很好的性质：在尖点 $i\infty$处取值 1，而在任一与 $i\infty$是 Γ'不等价的尖点 ζ 处取值 0. 那么，对任一指定的与 $i\infty$是 Γ'不等价的尖点 ζ，能否也定义具有这样的性质的模形式呢？下面就来讨论这一问题.

设 ζ 是一个尖点，Γ'是同余子群，以及

$$\alpha(i\infty)=\zeta,\quad \alpha\in\Gamma. \tag{22.16}$$

再设

$$\Gamma''=\alpha^{-1}\Gamma'\alpha. \tag{22.17}$$

容易验证(留给读者)：

$$\Gamma''_\infty=\alpha^{-1}\Gamma'_\zeta\alpha, \tag{22.18}$$

ζ 是 Γ'的正则尖点的充要条件是 $i\infty$是 Γ''的正则尖点，(22.19)

以及

$\{\sigma\}$ 是 Γ' 关于 Γ'_ζ 的右陪集分解代表系的充要条件是

$\{\alpha^{-1}\sigma\alpha\}$ 是 Γ'' 关于 Γ''_∞ 的右陪集分解代表系. (22.20)

定义 22.2 设 ζ 是一个尖点，Γ'是同余子群，$\alpha\in\Gamma$ 满足式(22.16)，以及 Γ''由式(22.17)给出. 再设 $P_\nu(\Gamma'',k)$是同余子群 Γ''在尖点 $i\infty$处的权为 k 特征为 ν 的 Poincaré 级数. 那么，我们称

$$P_\nu^{(\zeta)}(\Gamma',k)=P_\nu^{(\zeta)}(\Gamma',k;\alpha)=P_\nu(\Gamma'',k)\circ[\alpha^{-1}]_k$$

是**同余子群 Γ'在尖点 ζ 处的权为 k 特征为 ν 的 Poincaré 级数**；当 $\nu=0$ 时，也称为是**同余子群 Γ'在尖点 ζ 处的权为 k 的标准 Eisenstein 级数**.

由定理 22.1，式(22.19)和(22.20)，立即推出

$$P_\nu(\Gamma'',k)=\sum_{\sigma_1\in\Gamma''_\infty\backslash\Gamma''}e_q^\nu\circ[\sigma_1]_k=\sum_{\sigma_1\in\Gamma'_\infty\backslash\Gamma'}e_q^\nu\circ[\alpha^{-1}\sigma\alpha]_k, \tag{22.21}$$

$$P_\nu^{(\zeta)}(\Gamma',k)=P_\nu^{(\zeta)}(\Gamma',k;\alpha)=\sum_{\sigma\in\Gamma'_\infty\backslash\Gamma'}e_q^\nu\circ[\alpha^{-1}\sigma]_k, \tag{22.22}$$

以及下面的定理(证明留给读者)

定理 22.2 设 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 是同余子群，ζ 是一个尖点. 则当 $k\geqslant 3$ 时，

(i) Poincaré 级数 $P_\nu^{(\zeta)}(\Gamma',k)(z)$是 H 内的解析函数；

(ii)
$$P_0^{(\zeta)}(\Gamma',k) \in M_k(\Gamma'), \tag{22.23}$$
及
$$\begin{aligned} &P_0^{(\zeta)}(\Gamma',k)(\zeta)=1,\\ &P_0^{(\zeta)}(\Gamma',k)(\xi)=0,\quad \text{尖点 } \xi \text{ 与 } \zeta \text{ 是 } \Gamma' \text{不等价的；} \end{aligned} \tag{22.24}$$

(iii) $P_\nu^{(\zeta)}(\Gamma',k) \in S_k(\Gamma'),\quad \nu \geqslant 1.$ (22.25)

关于定义 22.2 和定理 22.2 需要说明以下几点(具体证明留给读者)：

(a) $P_\nu(\Gamma'',k)$和 $P_\nu^{(\zeta)}(\Gamma',k)$的定义是和 α 的选取有关. 事实上可以取$\pm\alpha T^h$(h 为任意整数)来代替 α,都满足要求. 容易验证
$$P_\nu((\pm\alpha T^h)^{-1}\Gamma'(\pm\alpha T^h),k) = \mathrm{e}_q^\nu(-h)P_\nu(\alpha^{-1}\Gamma'\alpha,k)\circ[T^h]_k, \tag{22.26}$$
这与 h 有关而和$\pm$号的选取无关,以及
$$P_\nu^{(\zeta)}(\Gamma',k;\pm\alpha T^h) = (\pm 1)^k\mathrm{e}_q^\nu(-h)P_\nu^{(\zeta)}(\Gamma',k;\alpha), \tag{22.27}$$
这与 h 和$\pm$号的选取都有关. 特别的,当 $\nu=0$ 时,
$$P_0^{(\zeta)}(\Gamma',k;\pm\alpha T^h) = (\pm 1)^k P_0^{(\zeta)}(\Gamma',k;\alpha). \tag{22.28}$$

(b) 由 § 15 的讨论(式(15.15)～(15.17))及性质 15.13 知,仅当 ζ 是 Γ'的正则尖点 $2\nmid k\geqslant 3$(这时$-I\notin\Gamma'$)时,$P_0^{(\zeta)}(\Gamma',k)$在与 ζ 是 Γ'等价的尖点 ξ 上的取值,随着使得 $\beta(\mathrm{i}\infty)=\xi$ 成立的 β 的不同选取,可等于$+1$ 或-1. 但我们约定：对 $\xi=\zeta$,总取 $\beta=\alpha,\alpha(\mathrm{i}\infty)=\zeta$,故必有
$$P_0^{(\zeta)}(\Gamma',k)(\zeta) = P_0^{(\zeta)}(\Gamma',k)\circ[\alpha]_k(\mathrm{i}\infty) = P_\nu(\Gamma'',k)(\mathrm{i}\infty) = 1, \tag{22.29}$$
即式(22.24)的第一式一定成立.

由定理 22.2 立即推出下面的定理,它刻画了同余子群的模形式空间的结构,给出了模形式空间与尖形式空间的维数之间的关系,表明同余子群的模形式空间可归结为讨论标准 Eisenstein 级数与尖形式空间(证明留给读者).

定理 22.3　设 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 是同余子群,$\xi(j)(1\leqslant j\leqslant\mathscr{E}_\infty(\Gamma'))$是 Γ'的

全部两两不等价的尖点，前 $\mathscr{E}_{\infty}^{+}(\Gamma')=u$ 个是正则的，后 $\mathscr{E}_{\infty}^{-}(\Gamma')=v$ 个是非正则的；再设 $f\in M_k(\Gamma')(k\geqslant 3)$. 那么

(i) 当 $2|k$ 时，

$$f-\sum_{j=1}^{u+v}f(\xi(j))P_0^{(\xi(j))}(\Gamma',k)\in S_k(\Gamma'),\tag{22.30}$$

$$\dim M_k(\Gamma')=\dim S_k(\Gamma')+\mathscr{E}_{\infty}(\Gamma');\tag{22.31}$$

(ii) 当 $2\nmid k$ 时，

$$f-\sum_{j=1}^{u}f(\xi(j))P_0^{(\xi(j))}(\Gamma',k)\in S_k(\Gamma'),\tag{22.32}$$

$$\dim M_k(\Gamma')=\dim S_k(\Gamma')+\mathscr{E}_{\infty}^{+}(\Gamma').\tag{22.33}$$

下面来讨论 Poincaré 级数的完备性. 先来求尖形式与 Poincaré 级数的 Petersson 内积.

定理 22.4 设 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 是同余子群，Γ'的尖点 $\mathrm{i}\infty$的宽度为 f，q 由式(22.3)给出，以及 $k\geqslant 3$. 再设 $g\in M_k(\Gamma')$，$g(\mathrm{i}\infty)=0$ 及其 Fourier 展式为

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{e}_q^n(z).\tag{22.34}$$

那么

$$\langle g,P_\nu(\Gamma',k)\rangle=\begin{cases}[\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma}']^{-1}f(q/4\pi\nu)^{k-1}(k-2)!a_\nu, & \nu\geqslant 1,\\ 0, & \nu=0.\end{cases}\tag{22.35}$$

特别的有

$$\langle P_\nu(\Gamma',k),P_0(\Gamma',k)\rangle=0,\quad \nu\geqslant 1.\tag{22.36}$$

证 设 $\mathscr{F}'$是 Γ'的基本区域. 由式(22.5)及(21.1)知

$$\langle g,P_\nu(\Gamma',k)\rangle=\frac{1}{[\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma}']}\sum_{\sigma\in\Gamma'_\infty\backslash\Gamma'}\int_{\mathscr{F}'}g(z)\,\overline{\mathrm{e}_q^\nu\circ[\sigma]_k(z)}y^k\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}.$$

在每个积分中作相应的变换 $w=\sigma(z)=u+\mathrm{i}v$，由于 $\sigma\in\Gamma'$，利用性质 21.1 及式(21.4)，得到

$$\begin{aligned}\langle g,P_\nu(\Gamma',k)\rangle&=\frac{1}{[\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma}']}\sum_{\sigma\in\Gamma'_\infty\backslash\Gamma'}\int_{\sigma\mathscr{F}'}g(w)\,\overline{\mathrm{e}_q^\nu(w)}v^k\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{v^2}\\&=\frac{1}{[\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma}']}\int_{\mathscr{D}}g(w)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu\overline{w}/q}v^k\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{v^2},\end{aligned}\tag{22.37}$$

其中

$$\mathscr{D} = \bigcup_{\sigma \in \Gamma'_\infty \backslash \Gamma'} \sigma \mathscr{F}'. \tag{22.38}$$

由于(为什么)

$$\overline{\Gamma}' = \bigcup_{\sigma \in \Gamma'_\infty \backslash \Gamma'} \overline{\Gamma}'_\infty \sigma,$$

所以,$\mathscr{D}$ 是 Γ'_∞的基本区域(Γ'_∞虽不是同余子群,但也可以类似定义它的基本区域 $\Gamma'_\infty \backslash H^*$,并有同样的基本性质). 另一方面,$\Gamma'_\infty$的基本区域显然可取为

$$\mathscr{D}_1 : 0 \leqslant \mathrm{Re} w < f, \quad w \in H^* \tag{22.38'}$$

(为什么). 由此及 $g(w)$,$e_q^\nu(w)$都是 Γ'_∞的权为 k 的模形式,所以,由性质 21.3 知(以下推导的合理性请读者自己验证),

$$\begin{aligned}\langle g, P_\nu(\Gamma', k)\rangle &= \frac{1}{[\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}']} \int_0^f \mathrm{d}u \int_0^\infty \Big(\sum_{n=1}^\infty a_n \mathrm{e}^{2\pi i n w/q} \Big) \mathrm{e}^{-2\pi i \nu \overline{w}/q} v^{k-2} \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{[\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}']} \sum_{n=1}^\infty a_n \Big(\int_0^f \mathrm{e}^{2\pi i u (n-\nu)/q} \mathrm{d}u \Big) \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\pi v (n+\nu)/q} v^{k-2} \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{22.39}$$

利用对整数 m 有

$$\int_0^f \mathrm{e}^{2\pi i u m/f} \mathrm{d}u = \begin{cases} f, & m = 0; \\ 0, & m \neq 0, \end{cases} \tag{22.40}$$

就得到:(i) 当 $q=f$ 时,

$$\langle g, P_\nu(\Gamma', k)\rangle = \begin{cases} 0, & \nu = 0; \\ \dfrac{f}{[\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}']} a_\nu \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-4\pi v \nu/f} v^{k-2} \mathrm{d}v, & \nu \geqslant 1. \end{cases} \tag{22.41}$$

(ii) 当 $q=2f$ 时,仅出现 $\nu \geqslant 1$,$2 \nmid \nu$ 及 $2 \nmid k$,且 $i\infty$是 Γ'的非正则尖点. 这时,$g(z)$的 Fourier 展式(22.34)中,当 $2|n$ 时 $a_n=0$(为什么). 因此推得

$$\langle g, P_\nu(\Gamma', k)\rangle = \frac{f}{[\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}']} a_\nu \int_0^\infty \mathrm{e}^{-4\pi v \nu/(2f)} v^{k-2} \mathrm{d}v, \quad \nu \geqslant 1, \ 2 \nmid \nu. \tag{22.42}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-4\pi\nu v/q} v^{k-2} dv = \left(\frac{q}{4\pi\nu}\right)^{k-1}(k-2)!, \quad \nu \geqslant 1, k \geqslant 2. \tag{22.43}$$

由此及前面两式就证明了式(22.35). 在式(22.35)中取 $\nu=0$ 及 $g=P_\nu(\Gamma',k)$, $\nu\geqslant1$, 即得式(22.36). 证毕.

由定理 22.4 立即推出所谓的 Poincaré 级数的完备性定理.

定理 22.5 设 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 是同余子群, $k\geqslant3$. 那么, 全体 Poincaré 级数 $P_\nu(\Gamma',k)(\nu\geqslant1)$的有限线性组合生成 $S_k(\Gamma')$, 即 Poincaré 级数 $P_\nu(\Gamma',k)$ $(\nu\geqslant1)$在线性空间 $S_k(\Gamma')$中是完备的.

证 由定理 19.1 知, $S_k(\Gamma')(k\geqslant3)$是有限维线性空间, 所以 $P_\nu(\Gamma',k)$ $(\nu\geqslant1)$的有限线性组合生成 $S_k(\Gamma')$的一个子空间, 记作 $S_k(\Gamma';P)$. 这样, 由内积空间理论知, 内积空间 $S_k(\Gamma')$可分解为它的子空间 $S_k(\Gamma';P)$和 $T_k(\Gamma';P)$的直和, 其中 $T_k(\Gamma';P)$是 $S_k(\Gamma')$中所有和 $S_k(\Gamma';P)$正交的元素组成的子空间. 由定理 22.4 知, 任一 $g\in T_k(\Gamma';P)$ 必恒等于零. 这就证明了所要结论.

定理 22.5 具有理论意义, 但至今对 Poincaré 级数的性质了解得不多. 由定理 22.3, 22.4 及定理 21.9, 立即推出(证明留给读者)

定理 22.6 在定理 22.3 的符号下, 在空间 $M_k(\Gamma')$中, $S_k(\Gamma')$的正交补空间 $N_k(\Gamma')$由标准 Eisenstein 级数 $P_0^{(\zeta(j))}(\Gamma',k)$ $(1\leqslant j\leqslant \mathscr{E}_\infty(\Gamma'))$ 生成.

下面以 $\Gamma'=\Gamma_0(N), \Gamma_1(N), \Gamma(N)$为例, 具体给出它们的 Poincaré 级数及标准 Eisenstein 级数, 需要说明或证明之处都留给读者. 容易看出, 这些同余子群都满足条件(22.9), 所以它们的 Poincaré 级数($\nu\geqslant0$)的 Fourier 展式的系数均为实数.

例 22.1 讨论 $\Gamma'=\Gamma_0(N)$的情形.

$-I\in\Gamma_0(N)$, $q=f=1$, $i\infty$是正则尖点, 以及 $\Gamma'_\infty=T_1=\{\pm T^j, j\in \mathbf{Z}\}$. 因此, $T_1\backslash\Gamma_0(N)$的右陪集代表系可取为

$$\sigma=\begin{bmatrix} * & * \\ c & d\end{bmatrix}\in\Gamma_0(N):\ N|c, (c,d)=1, c\geqslant0;\ c=0\text{ 时}, d=1, \tag{22.44}$$

其中矩阵第一行的元素任意取定. 注意到 $2k$ 为偶数, 所以

$$P_\nu(\Gamma_0(N),2k)(z)=\sum_{\sigma\in T_1\backslash\Gamma_0(N)}\frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z))}{(cz+d)^{2k}}$$

$$=\mathrm{e}(\nu z)+\sum_{N|c>0}\sum_{(c,d)=1}\frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z))}{(cz+d)^{2k}}. \qquad (22.45)$$

当 $\nu=0$ 时,对应的标准 Eisenstein 级数是

$$P_0(\Gamma_0(N),2k)(z)=1+\sum_{N|c>0}\sum_{(c,d)=1}\frac{1}{(cz+d)^{2k}}. \qquad (22.46)$$

例 22.2 讨论 $\Gamma'=\Gamma_1(N)$的情形.

因为 $\Gamma_1(2)=\Gamma_0(2)$,所以只要考虑$N\geqslant3$. $-I\notin\Gamma_1(N)$,$q=f=1$,$i\infty$是正则尖点,以及 $\Gamma'_\infty=T_1^+=\{T^j,j\in\mathbf{Z}\}$. 因此,$T_1^+\backslash\Gamma_1(N)$的右陪集代表系可取为

$$\sigma=\begin{bmatrix}* & *\\ c & d\end{bmatrix}\in\Gamma_1(N):\ N|c,(c,d)=1,\ d\equiv1(\operatorname{mod}N),$$

(22.47)

其中矩阵第一行的元素任意取定. 所以,当 $N\geqslant3$ 时,

$$P_\nu(\Gamma_1(N),k)(z)=\sum_{\sigma\in T_1^+\backslash\Gamma_1(N)}\frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z))}{(cz+d)^k}$$

$$=\mathrm{e}(\nu z)+\sum_{N|c\neq0}\sum_{(c,d)=1,d\equiv1(N)}\frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z))}{(cz+d)^k}.$$

(22.48)

当 $\nu=0$ 时,对应的标准 Eisenstein 级数是

$$P_0(\Gamma_1(N),k)(z)=1+\sum_{N|c\neq0}\sum_{(c,d)=1,d\equiv1(N)}\frac{1}{(cz+d)^k}.$$

(22.49)

例 22.3 讨论 $\Gamma'=\Gamma(N)$的情形.

当 $N\geqslant3$ 时,$-I\notin\Gamma(N)$,$q=f=N$,$i\infty$是正则尖点,以及 $\Gamma'_\infty=T_N^+=\{T^{jN},j\in\mathbf{Z}\}$. 因此 $T_N^+\backslash\Gamma(N)$的右陪集代表系可取为

$$\sigma=\begin{bmatrix}* & *\\ c & d\end{bmatrix}\in\Gamma(N):\ N|c,(c,d)=1,\ d\equiv1(\operatorname{mod}N),$$

(22.50)

其中矩阵第一行的元素任意取定. 所以,当 $N\geqslant3$ 时,

$$P_\nu(\Gamma(N),k)(z)=\sum_{\sigma\in T_N^+\backslash\Gamma(N)}\frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z)/N)}{(cz+d)^k}$$

$$=\mathrm{e}(\nu z/N)+\sum_{N|c\neq 0}\sum_{(c,d)=1,d\equiv 1(N)}\frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z)/N)}{(cz+d)^k}. \tag{22.51}$$

当 $\nu=0$ 时,对应的标准 Eisenstein 级数是

$$P_0(\Gamma(N),k)(z)=1+\sum_{N|c\neq 0}\sum_{(c,d)=1,d\equiv 1(N)}\frac{1}{(cz+d)^k}. \tag{22.52}$$

当 $N=2$ 时,$-I\in\Gamma(2)$,$q=f=2$,$i\infty$是正则尖点,以及 $\Gamma'_\infty=T_2=\{\pm T^{2j},j\in\mathbf{Z}\}$. 因此,$T_2\backslash\Gamma(2)$的右陪集代表系可取为

$$\sigma=\begin{bmatrix} * & * \\ c & d\end{bmatrix}\in\Gamma(2):\ 2|c>0,(c,d)=1,\text{及 } c=0 \text{ 时},d=1, \tag{22.53}$$

其中矩阵第一行的元素任意取定. 注意到 k 为偶数,所以

$$P_\nu(\Gamma(2),2k)(z)=\sum_{\sigma\in T_2\backslash\Gamma(2)}\frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z)/2)}{(cz+d)^{2k}}$$

$$=\mathrm{e}(\nu z/2)+\sum_{2|c>0}\sum_{(c,d)=1}\frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z)/2)}{(cz+d)^{2k}}. \tag{22.54}$$

当 $\nu=0$ 时,对应的标准 Eisenstein 级数是

$$P_0(\Gamma(2),2k)(z)=1+\sum_{2|c>0}\sum_{(c,d)=1}\frac{1}{(cz+d)^{2k}}. \tag{22.55}$$

最后,应该指出,$\Gamma_1(N)$和 $\Gamma(N)$的标准 Eisenstein 级数是相同的,以及

$$P_0(\Gamma_0(2),2k)=P_0(\Gamma_1(2),2k)=P_0(\Gamma(2),2k). \tag{22.56}$$

§ 23 同余子群的 Eisenstein 级数

本节将讨论同余子群 $\Gamma(N)$,$\Gamma_1(N)$及 $\Gamma_0(N)$的 Eisenstein 级数,主要是讨论 $\Gamma(N)$的 Eisenstein 级数. 当 $N=1$ 时,$\Gamma(1)=\Gamma_1(1)=\Gamma_0(1)=\Gamma$,它在尖点 $i\infty$处的权为 $2k$ 的标准 Eisenstein 级数

$$P_0(\Gamma,2k)(z)=1+\sum_{c>0}\sum_{(c,d)=1}\frac{1}{(cz+d)^{2k}}=E_{2k}(z),\quad k\geqslant 2.\tag{23.1}$$

这就是在§5中讨论完全模群 Γ 上的标准 $2k$ 阶 Eisenstein 级数(见式(5.45)和(5.47)). 为了和§5的符号保持一致,以后我们记**同余子群 Γ' 在尖点 $i\infty$ 处的权为 k 的标准 Eisenstein 级数**为

$$E_k(\Gamma')(z)=E_k(z;\Gamma')=P_0(z;\Gamma',k)=P_0(\Gamma',k)(z),\quad k\geqslant 3.\tag{23.2}$$

以及**同余子群 Γ' 在任一尖点 ζ 处的权为 k 的标准 Eisenstein 级数**记为

$$\begin{aligned}E_k^{(\zeta)}(\Gamma')(z)&=E_k^{(\zeta)}(z;\Gamma')=P_0^{(\zeta)}(z;\Gamma',k)\\&=P_0^{(\zeta)}(\Gamma',k)(z),\quad k\geqslant 3.\end{aligned}\tag{23.3}$$

这样,由式(22.35),(22.38′)及(22.41)知,同余子群 $\Gamma_0(N)$ 以及 $\Gamma(N)$ 和 $\Gamma_1(N)$ 在尖点 $i\infty$ 处的标准 Eisenstein 级数是:当 $N\geqslant 1$, $k\geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}E_{2k}(\Gamma_0(N))(z)=E_{2k}(z;\Gamma_0(N))&=\sum_{c\equiv 0(\mathrm{mod}\,N),c\geqslant 0}\ \sum_{(c,d)=1}{}^{*}\frac{1}{(cz+d)^{2k}}\\&=1+\sum_{c\equiv 0(N),c>0}\ \sum_{(c,d)=1}\frac{1}{(cz+d)^{2k}},\end{aligned}\tag{23.4}$$

其中求和条件 * 表示 $c=0$ 时 $d=1$. 当 $N\geqslant 3,k\geqslant 3$ 时,

$$\begin{aligned}E_k(\Gamma(N))(z)=E_k(z;\Gamma(N))&=E_k(\Gamma_1(N))(z)=E_k(z;\Gamma_1(N))\\&=\sum_{c\equiv 0(N)}\ \sum_{(c,d)=1,d\equiv 1(N)}\frac{1}{(cz+d)^{k}}\\&=1+\sum_{c\equiv 0(N),c\neq 0}\ \sum_{(c,d)=1,d\equiv 1(N)}\frac{1}{(cz+d)^{k}};\end{aligned}\tag{23.5}$$

以及,当 $N=1,2$ 时,有

$$E_{2k}(z;\Gamma(N))=E_{2k}(z;\Gamma_1(N))=E_{2k}(z;\Gamma_0(N)),\quad k\geqslant 2.\tag{23.6}$$

我们先来讨论 $\Gamma(N)$ 及 $\Gamma_1(N)$ 的 Eisenstein 级数. 由于 $\Gamma(N)$ 是 Γ 的正规子群,所以,同余子群 $\Gamma(N)$ 在任一尖点 ζ 处的权为 k 的标准 Eisenstein 级数,由定义 22.2 知

$$E_k^{(\zeta)}(\Gamma(N)) = E_k(\Gamma(N)) \circ [\alpha^{-1}]_k, \tag{23.7}$$

这里

$$\alpha(\mathrm{i}\infty) = \zeta, \quad \alpha \in \Gamma. \tag{23.8}$$

设

$$\zeta = s/(-r), \quad (s,r) = 1. \tag{23.9}$$

由式(23.5)计算得(留给读者)

$$E_k^{(s/(-r))}(\Gamma(N))(z) = \sum_{c\equiv r(N)} \sum_{(c,d)=1,d\equiv s(N)} \frac{1}{(cz+d)^k}, \quad N \geqslant 3, \tag{23.10$_1$}$$

当 $N=2$ 时,由式(23.4)及(23.6)计算得(留给读者)

$$E_{2k}^{(s/(-r))}(\Gamma(2))(z) = \frac{1}{2} \sum_{c\equiv r(2)} \sum_{(c,d)=1,d\equiv s(2)} \frac{1}{(cz+d)^{2k}}, \tag{23.10$_2$}$$

以及 $N=1$ 时就是式(5.47). 应该注意的是:当求 $E_k^{(s/(-r))}(\Gamma(N))(z)$ 在尖点 $\zeta=s/(-r)$ 处的值时,仍取上面所取定的 α,以及当 $N=1,2$ 时,要乘以 1/2.

当 $N\geqslant 3$ 时,$\Gamma_1(N)$虽不是 Γ 的正规子群,但它是 $\Gamma_0(N)$的正规子群. 所以,当尖点 ζ 满足

$$\alpha(\mathrm{i}\infty) = \zeta, \quad \alpha \in \Gamma_0(N) \tag{23.11}$$

时,即满足

$$\zeta = s/(-r), \quad r \equiv 0 (\mathrm{mod}\, N), \quad (s,r) = 1 \tag{23.12}$$

时,$\Gamma_1(N)(N\geqslant 3)$在这样的尖点 ζ 处的权为 k 的标准 Eisenstein 级数和 $\Gamma(N)$的相同(见定义 22.2),即当条件(23.12)满足时,有

$$\begin{aligned} E_k^{(s/(-r))}(\Gamma_1(N))(z) &= E_k(\Gamma_1(N)) \circ [\alpha^{-1}]_k(z) \\ &= E_k(\Gamma(N)) \circ [\alpha^{-1}]_k(z) \\ &= E_k^{(s/-r)}(\Gamma(N))(z), \quad N \geqslant 3. \end{aligned} \tag{23.13}$$

当尖点不满足这样的条件时,$\Gamma_1(N)$在该尖点处的 Eisenstein 级数较复杂,这里就不讨论了.

由以上讨论(见式(23.10$_1$)和(23.10$_2$))启发,当 $N\geqslant 1$ 时,对满足条件

$$(u,v,N) = 1 \tag{23.14}$$

的整数 u,v，我们可一般地引进级数

$$E_k(z;u,v,N) = E_k^{(u,v)}(\Gamma(N))(z)$$

$$= \sum_{c\equiv u(N)} \sum_{(c,d)=1,d\equiv v(N)} \frac{1}{(cz+d)^k}, \quad k \geqslant 3. \qquad (23.15)$$

称它为是**权为 k 的 N 级标准广义 Eisenstein 级数**，这里的上标 (u,v) 表示行向量，它包含了以上讨论的 Eisenstein 级数. 特别的，当 $N\geqslant 3$ 时，

$$E_k(z;\Gamma(N)) = E_k(z;\Gamma_1(N))$$

$$= E_k(z;0,1,N) \in M_k(\Gamma_1(N)), \quad (23.16_1)$$

及 $N=2$ 时，

$$E_{2k}(z;\Gamma(2)) = E_{2k}(z;\Gamma_1(2))$$

$$= (1/2)E_{2k}(z;0,1,2) \in M_k(\Gamma_1(2)), \qquad (23.16_2)$$

$N=1$ 时就是式(5.47). 要注意的是：当 $N=1,2$ 时，要乘以 1/2. 此时，在 §5 中我们是先引入完全模群 Γ 上的 $2k$ 阶 Eisenstein 级数

$$G_{2k}(z) = \sum_{c=-\infty}^{\infty} \sum_{d=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(cz+d)^{2k}}, \quad z \in \boldsymbol{H},$$

其中求和条件$'$表示 c 和 d 不同时为零，然后导出完全模群 Γ 上的标准 $2k$ 阶 Eisenstein 级数 $E_{2k}(z)=E_{2k}(z;\Gamma)$. 反过来，相应这里的 $E_k(z;\Gamma(N)) = E_k(z;\Gamma_1(N))$，当 $N\geqslant 1$ 时，可引进(参看式(23.5))

$$G_k(\Gamma(N))(z) = G_k(z;\Gamma(N)) = G_k(\Gamma_1(N))(z) = G_k(z;\Gamma_1(N))$$

$$= \sum_{c\equiv 0(N)} \sum_{d\equiv 1(N)}{}' \frac{1}{(cz+d)^k}, \quad k \geqslant 3, \qquad (23.17)$$

$G_k(z;\Gamma(N))=G_k(z;\Gamma_1(N))$就称为是**同余子群 $\Gamma(N)(\Gamma_1(N))$ 在尖点 $\mathrm{i}\infty$ 处的 k 阶 Eisenstein 级数**. 相应于 $E_{2k}(z;\Gamma_0(N))$，可引进(参看式(23.4))

$$G_{2k}(\Gamma_0(N))(z) = G_{2k}(z;\Gamma_0(N))$$

$$= \sum_{c\equiv 0(N)} \sum_{d}{}' \frac{1}{(cz+d)^{2k}}$$

$$= G_{2k}(Nz), \quad k \geqslant 2, \qquad (23.18)$$

其中求和条件$'$表示 c 和 d 不同时为零. 我们称它是**同余子群 $\Gamma_0(N)$**

在尖点 $\mathrm{i}\infty$ 处的 $2k$ 阶 Eisenstein 级数. 一般的，相应这里的 $E_k(z;u,v,N)$，对任意整数 u,v，可引入

$$\begin{aligned} G_k(z;u,v,N) &= G_k^{(u,v)}(\Gamma_0(N))(z) \\ &= \sum_{c\equiv u(N)} \sum_{d\equiv v(N)}{}' \frac{1}{(cz+d)^k}, \quad k \geqslant 3, \end{aligned} \tag{23.19}$$

这里的上标 (u,v) 表示行向量，求和条件 $'$ 表示 c 和 d 不同时为零. 我们把 $G_k(z;u,v,N)$ 称为**权为 k 的 N 级广义 Eisenstein 级数**. 显见，有以下的简单性质成立：

定理 23.1 设 $N\geqslant 1$. (i) 若

$$(u_1,v_1) \equiv (u_2,v_2)(\bmod N), \tag{23.20}$$

即
$$u_1 \equiv u_2(\bmod N), \quad v_1 \equiv v_2(\bmod N), \tag{23.20$'$}$$

则
$$E_k(z;u_1,v_1,N) = E_k(z;u_2,v_2,N),$$
$$G_k(z;u_1,v_1,N) = G_k(z;u_2,v_2,N).$$

(ii) $G_k(z;u,v,N) = l^{-k}G_k(z;u/l,v/l,N/l)$, $(u,v,N) = l$,

$G_k(z;0,0,N) = N^{-k}G_k(z)$,

$G_k(z;-u,-v,N) = (-1)^k G_k(z;u,v,N)$,

$G_k(z;-u,-v,N) = 0$, $2u \equiv 2v \equiv 0(\bmod N)$, $2\nmid k$.

(iii) $G_k^{(u,v)}(\Gamma(N)) \circ [\gamma]_k = G_k^{(u,v)\gamma}(\Gamma(N))$, $\gamma \in \Gamma$,

$E_k^{(u,v)}(\Gamma(N)) \circ [\gamma]_k = E_k^{(u,v)\gamma}(\Gamma(N))$, $\gamma \in \Gamma$.

(iv) $G_k(\Gamma(N)), G_k(\Gamma_1(N)) \in M_k(\Gamma_1(N))$,

$G_{2k}(\Gamma_0(N)) \in M_{2k}(\Gamma_0(N))$,

$G_k(z;u,v,N)$, $E_k(z;u,v,N) \in M_k(\Gamma(N))$,

$G_k(z;0,v,N)$, $E_k(z;0,v,N) \in M_k(\Gamma_1(N))$.

证 我们来证(iii)，其他留给读者. 容易验证：对 $\gamma\in \mathrm{SL}_2(\boldsymbol{R})$ 有

$$(cz+d)^{-k} \circ [\gamma]_k = (c'z+d')^{-k},$$

其中

$$(c',d') = (c,d)\gamma.$$

这样，当 $\gamma\in\Gamma$ 时，

$$(c,d) \equiv (u,v)(\bmod N) \Longleftrightarrow (c',d') \equiv (u,v)\gamma(\bmod N). \tag{23.21}$$

由此及式(23.15)和(23.19),就推出所要结论.

由定理 23.1(iii)及性质 15.14 立即推出(证明留给读者):

定理 23.2 设 $N\geqslant 1$. 我们有

$$\sum_{\substack{a=1\\(a,N)=1}}^{N} E_k^{(0,1)}(\Gamma(N))\circ[\rho(a)]_k = \sum_{\substack{a=1\\(a,N)=1}}^{N} E_k^{(0,a)}(\Gamma(N)) \in M_k(\Gamma_0(N)), \tag{23.22}$$

$$\prod_{\substack{a=1\\(a,N)=1}}^{N} E_k^{(0,1)}(\Gamma(N))\circ[\rho(a)]_k = \prod_{\substack{a=1\\(a,N)=1}}^{N} E_k^{(0,a)}(\Gamma(N)) \in M_{k\varphi(N)}(\Gamma_0(N)), \tag{23.23}$$

以及

$$\sum_{\substack{a=1\\(a,N)=1}}^{N} G_k^{(0,1)}(\Gamma(N))\circ[\rho(a)]_k = \sum_{\substack{a=1\\(a,N)=1}}^{N} G_k^{(0,a)}(\Gamma(N)) \in M_k(\Gamma_0(N)), \tag{23.24}$$

$$\prod_{\substack{a=1\\(a,N)=1}}^{N} G_k^{(0,1)}(\Gamma(N))\circ[\rho(a)]_k = \prod_{\substack{a=1\\(a,N)=1}}^{N} G_k^{(0,a)}(\Gamma(N)) \in M_{k\varphi(N)}(\Gamma_0(N)), \tag{23.25}$$

这里的 $\rho(a)$同定理 11.3(ii).

$G_k(z;u,v,N)$和 $E_k(z;u,v,N)$之间有如下关系.

定理 23.3 设 $N\geqslant 1$. 当$(u,v,N)=1$ 时,我们有

$$G_k(z;u,v,N) = \sum_{\substack{a=1\\(a,N)=1}}^{N}\Big(\sum_{\substack{l=1\\al\equiv 1(N)}}^{\infty} l^{-k}\Big)E_k(z;au,av,N), \tag{23.26}$$

$$E_k(z;u,v,N) = \sum_{\substack{a=1\\(a,N)=1}}^{N}\Big(\sum_{\substack{l=1\\al\equiv 1(N)}}^{\infty} \mu(l)l^{-k}\Big)G_k(z;au,av,N). \tag{23.27}$$

证 由式(23.18)可得

$$G_k(z;u,v,N)=\sum_{\substack{l=1\\(l,N)=1}}^{\infty}\sum_{c\equiv u(N)}\sum_{\substack{d\equiv v(N)\\(c,d)=l}}\frac{1}{(cz+d)^k}$$

$$=\sum_{\substack{a=1\\(a,N)=1}}^{N}\left(\sum_{\substack{l=1\\al\equiv 1(N)}}^{\infty}l^{-k}\right)\sum_{c\equiv au(N)}\sum_{\substack{d\equiv av(N)\\(c,d)=1}}\frac{1}{(cz+d)^k}.$$

由此及式(23.15)就推出第一式.类似的,由式(23.15)出发可得第二式.

$E_{2k}(\Gamma_0(N))$,$G_{2k}(\Gamma_0(N))$和 $E_{2k}(z,0,v,N)$,$G_{2k}(z,0,v,N)$之间有如下关系.

定理 23.4 当 $N\geqslant 3$ 时,我们有

$$E_{2k}(z,\Gamma_0(N))=\frac{1}{2}\sum_{\substack{v=1\\(v,N)=1}}^{N}E_{2k}(z,0,v,N)$$

$$=\sum_{\substack{1\leqslant v<N/2\\(v,N)=1}}E_{2k}(z,0,v,N), \tag{23.28}$$

$$G_{2k}(z,\Gamma_0(N))=\sum_{v=1}^{N}G_{2k}(z,0,v,N). \tag{23.29}$$

这由它们的定义(见式(23.4),(23.15),(23.18)及(23.19))直接导出.$G_{2k}(\Gamma_0(N))$和 $E_{2k}(\Gamma_0(N))$之间有如下关系.

定理 23.5 我们有

$$(2\zeta(2k))^{-1}N^{2k}G_{2k}(\Gamma_0(N))$$

$$=\sum_{r|N}(N/r)^{2k}\prod_{p|N/r}(1-p^{-2k})E_{2k}(\Gamma_0(N/r)), \tag{23.30}$$

及

$$2\zeta(2k)N^{2k}\prod_{p|N}(1-p^{-2k})E_{2k}(\Gamma_0(N))$$

$$=\sum_{r|N}\mu(r)(N/r)^{2k}G_{2k}(\Gamma_0(N/r)). \tag{23.31}$$

证 由式(23.18)和(23.4)可得

$$G_{2k}(z;\Gamma_0(N))=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{c\equiv 0(N)}\sum_{(d,c)=l}\frac{1}{(cz+d)^{2k}}$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}l^{-2k}\sum_{c\equiv 0(N/(N,l))}\sum_{(d,c)=1}\frac{1}{(cz+d)^{2k}}$$

$$= 2\sum_{l=1}^{\infty} l^{-2k} E_{2k}(z, \Gamma_0(N/(N,l)))$$

$$= 2\sum_{r|N} r^{-2k} E_{2k}(z, \Gamma_0(N/r)) \sum_{\substack{l=1 \\ (l,N/r)=1}}^{\infty} l^{-2k}.$$

由此及

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,m)=1}}^{\infty} l^{-2k} = \zeta(2k) \prod_{p|m} (1 - p^{-2k}),$$

就推出第一式. 类似可得第二式(留给读者). 或记

$$f(m) = m^{2k} \prod_{p|m} (1 - p^{-2k}) E_{2k}(z, \Gamma_0(m)),$$

则第一式可表为

$$F(N) = (2\zeta(2k))^{-1} N^{2k} G_{2k}(\Gamma_0(N)) = \sum_{r|N} f(N/r).$$

由此利用 Mobius 变换即得第二式.

现在来讨论这些 Eisenstein 级数的 Fourier 展式. 一般地,这只要在它们相应的表达式中利用基本的 Fourier 展式(5. 33)就可得到. 先来证明

定理 23. 6 我们有

$$G_{2k}(z;\Gamma_0(N)) = 2\zeta(2k) + 2a(2k) \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) \mathrm{e}(nNz), \tag{23. 32}$$

$$E_{2k}(z;\Gamma_0(N)) = 1 + a(2k)\Big(\zeta(2k) \prod_{p|N} (1 - p^{-2k})\Big)^{-1} \times \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{ld=n, d|N} (d/N)^{2k} \mu(N/d) \sigma_{2k-1}(l) \Big) \mathrm{e}(nz), \tag{23. 33}$$

其中 $a(k)$ 由式(5. 36)给出.

证 由式(23. 18)及式(5. 29)就推出第一式. 进而,由此及定理 23. 5 的第二式就推出 $E_{2k}(z;\Gamma_0(N))$ 的 Fourier 展式.

下面来讨论 $G_k(z;u,v,N)$ 和 $E_k(z;u,v,N)$ 在尖点 $\mathrm{i}\infty$ 处的 Fourier 展式. 显然不妨假定 $0 \leqslant u < N$.

定理 23. 7 设

$$N \geqslant 1, \quad k \geqslant 3, \quad (u,v,N) = 1. \tag{23.34}$$

(i) 当 $0<u<N$ 时($N=1$ 时不存在)，

$$G_k(z;u,v,N) = a(k)N^{-k}\sum_{n=1}^{\infty}\{\sigma_{k-1}(n;u,v,N,N) + (-1)^k\sigma_{k-1}(n;-u,-v,N,N)\}e_N(nz), \tag{23.35}$$

其中 $a(k)$ 由式(5.36)给出，

$$\sigma_t(n;r,s,N,q) = \sum_{\substack{l\mid n \\ n/l\equiv r(N)}} l^t e_q(sl). \tag{23.36}$$

(ii) 当 $u=0$ 时，

$$G_k(z;0,v,N) = \sum_{d\equiv v(N)}{}' d^{-k} + a(k)N^{-k}\sum_{n=1}^{\infty}\{\sigma_{k-1}(n;0,v,N,N) + (-1)^k\sigma_{k-1}(n;0,-v,N,N)\}e_N(nz), \tag{23.37}$$

求和条件 $'$ 表示 d 不为零.

证　先讨论情形(i). 这时由式(23.19)得

$$G_k(z;u,v,N) = N^{-k}\sum_{c\equiv u(N)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{((cz+v)/N+m)^k}.$$

对内层和式利用 Fourier 展式(5.33)，得到

$$G_k(z;u,v,N) = a(k)N^{-k}\sum_{\substack{c\equiv u(N)\\ c>0}}\left(\sum_{l=1}^{\infty}l^{k-1}e_N(vl)\right)e_N(clz) + (-1)^k a(k)N^{-k}\sum_{\substack{c\equiv -u(N)\\ c>0}}\left(\sum_{l=1}^{\infty}l^{k-1}e_N(-vl)\right)e_N(clz).$$

令 $lc=n$，并交换上式中的求和号，即得所要结论. 情形(ii)与情形(i)的差别仅在于要多一项 $c=0$，这就是

$$\sum_{d\equiv v(N)}{}' d^{-k},$$

由此及(i)就证明了(ii). 容易看出，当 N 不能整除 n 时，

$$\sigma_t(n;0,s,N,N) = 0.$$

$E_k(z;u,v,N)$ 在尖点 $i\infty$ 处的 Fourier 展式可由定理 23.3 及 $G_k(z;u,v,N)$ 在尖点 $i\infty$ 处的 Fourier 展式推出，进而由式(23.16_1)

就可得到 $E_k(z;\Gamma(N))=E_k(z;\Gamma_1(N))$ 在尖点 $i\infty$ 处的 Fourier 展式. 当然也可以利用式(5.33)直接推导. 这些都留给读者.

定理 23.8　在条件(23.34)下,(i) 尖点 $i\infty$ 不是 $G_k(z;0,v,N)$ 的零点;(ii) 当 $0<u<N$ 时,除了 $G_{2k}(z;2,1,4)$ 及 $G_{2k}(z;2,-1,4)$ 外,尖点 $i\infty$ 是 $G_k(z;u,v,N)\in M_k(\Gamma(N))$ 的零点,阶为

$$\min(u,N-u).$$

证　先来证(i). 当 $N=1,2$ 时显然成立(为什么). 当 $N\geqslant 3$ 时,注意到 $(v,N)=1$,不妨设 $0<v<N$. 显然有

$$\sum_{d\equiv v(N)} d^{-k}>0,\quad 2\mid k;$$

以及当 $2\nmid k$ 时,

$$\sum_{d\equiv v(N)} d^{-k}=\sum_{j=0}^{\infty}\{(v+jN)^k-(N-v+jN)^k\}\begin{cases}>0, & v<N/2,\\ <0, & v>N/2.\end{cases}$$

由此及式(23.37)就证明了(i). 下面来证(ii). 由式(23.35)知,就是要求出这展式中出现非零系数的最小的 n,设为 n_0. 由条件及式(23.36) 知,必满足

$$n_0\equiv u(\operatorname{mod} N),\qquad 或\qquad n_0\equiv N-u(\operatorname{mod} N).$$

不难验证(留给读者):当 $u<N-u$ 时,$n_0=u$;当 $u>N-u$ 时,$n_0=N-u$;当 $u=N-u$ 时,展式(23.35)中第 $n_0=N/2$ 项的系数是

$$a(k)N^{-k}\{e^{2\pi iv/N}+(-1)^k e^{-2\pi iv/N}\}.$$

它等于零当且仅当

$$e^{4\pi iv/N}=(-1)^{k-1}.$$

由条件(23.34)知(为什么),这当且仅当 $2\mid k$ 及 $N=4,r=2,s=1$ 或 3 时才成立. 由此及 $G_k(z;u,v,N)\in M_k(\Gamma(N))$ 就证明了所要的结论(注意式(15.27)后的说明(b)).

$G_{2k}(z;2,1,4)$ 及 $G_{2k}(z;2,-1,4)$ 在尖点 $i\infty$ 处的零点阶数留给读者讨论. 证毕.

Eisenstein 级数 $G_k(z;u,v,N)$ 和 Weierstrass $\wp$ 函数之间有以下的关系.

定理 23.9　设 $z\in \boldsymbol{H}$,格 $\Lambda=\Lambda(z,1)$,$\wp(w)=\wp(w;\Lambda)$,$w\in \boldsymbol{C}$,以及条件(23.34)成立. 那么,

(i)

$$G_k(z;u,v,N) = ((-N)^{-k}/(k-1)!) \times \wp^{(k-2)}((uz+v)/N;\Lambda), \quad z \in \boldsymbol{H}. \tag{23.38}$$

(ii) $G_3(z;u,v,N) \neq 0, \quad z \in \boldsymbol{H}.$　　(23.39)

证　(i) 直接由式(2.15)及式(23.19)推出. 由性质 1.7 及条件(23.34)知$(uz+v)/N$ 是格 Λ 的 N 阶格点, 所以, $G_k(z;u,v,N)$就是$\wp^{(k-2)}(w;\Lambda)$在 N 阶格点$(uz+v)/N$ 处的值. 特别的, 当 $k=3$ 时, $G_3(z;u,v,N)$ 就是$\wp'(w;\Lambda)$在 N 阶格点$(uz+v)/N$ 处的值. 由定理 3.1 知, $\wp'(w;\Lambda)$的零点是$(az+b)/2$, $2\nmid(a,b)$. 因此, 当$2(uz+v)/N$ 不是格 Λ 的格点时必有$\wp'((uz+v)/N;\Lambda)\neq 0$. 由此及条件(23.34)就证明了(ii).

由定理 23.8 和 23.9 可得到一个有用的模形式.

定理 23.10　设 p 是奇素数. 那么,

(i)
$$g(z) = \prod_{v=1}^{p-1} G_3(z;0,v,p) \in M_{3(p-1)}(\Gamma_0(p)), \tag{23.40}$$

且仅有的零点在尖点 0 处, 阶为$(p^2-1)/4$.

(ii) 设

$$f(z) = \prod_{v=1}^{(p-1)/2} G_3(z;0,v,p). \tag{23.41}$$

我们有

$$g(z) = (-1)^{(p-1)/2} f^2(z), \quad f \in M_{3(p-1)}(\Gamma_0(p), \chi_1), \tag{23.42}$$

其中 χ_1 是模 p 的实特征, 即模 p 的 Legendre 符号.

证　先来证(i). 由式(23.19)和(23.25)立即推出 $g(z) \in M_{3(p-1)}(\Gamma_0(p))$, 进而由定理 23.9(ii)知在 $\boldsymbol{H}$ 内它没有零点. 由定理 12.6 知 $\Gamma_0(p)$有两个不等价的尖点: 0 和 i∞. 由定理 23.8(i)知 i∞ 不是它的零点. g 在尖点 0 处的性状即 $g \circ [S]_{3(p-1)}$在尖点 i∞处的性状. 容易看出

$$g \circ [S]_{3(p-1)}(z) = \prod_{v=1}^{p-1} (G_3(z;0,v,p) \circ [S]_3) = \prod_{v=1}^{p-1} G_3(z;v,0,p).$$

由定理 23.8(ii)立即算出(留给读者): 尖点 i∞是 $g \circ [S]_{3(p-1)}$的零点, 阶为$(p^2-1)/4$(注意式(15.27)后的说明(b)). 下面来证(ii). 由

定理 23.1(ii)和(i)知

$$G_3(z;0,v,p)=-G_3(z;0,-v,p)=-G_3(z;0,p-v,p),\tag{23.43}$$

由此及式(23.40),(23.41)就推出式(23.42)的第一式. 设

$$\gamma=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in\Gamma_0(N),$$

由定理 23.1(iii)和(i)知

$$\begin{aligned}f\circ[\gamma]_{3(p-1)/2}(z)&=\prod_{v=1}^{(p-1)/2}(G_3(z;0,v,p)\circ[\gamma]_3)\\&=\prod_{v=1}^{(p-1)/2}G_3(z;0,vd,p).\end{aligned}\tag{23.44}$$

由熟知的 Gauss 引理(见[P&P3,第四章 § 6 引理 2])知：若设

$$t_v\equiv vd(\bmod p),\quad 0<t_v<p,\quad 1\leqslant v\leqslant(p-1)/2,$$

并以 $r_1,\cdots,r_n$ 表 $t_v(1\leqslant v\leqslant(p-1)/2)$中所有大于 $p/2$ 的数,以 s_1, $\cdots,s_m$ 表 $t_v(1\leqslant v\leqslant(p-1)/2)$中所有小于 $p/2$ 的数,那么,$s_1,\cdots,s_m$, $p-r_1,\cdots,p-r_n$ 恰好是 $1,\cdots,(p-1)/2$ 的一个排列,且有

$$\chi_1(\gamma)=\left(\frac{d}{p}\right)=(-1)^n.$$

利用定理 23.1(i),式(23.43)和(23.44),由此就推出式(23.42)的第二式. 证毕.

§ 24　同余子群的 Poincaré 级数的 Fourier 展式

同余子群 $\Gamma(N)$,$\Gamma_1(N)$和 $\Gamma_0(N)$的 Eisenstein 级数在尖点 i∞处的 Fourier 展式已在上节作了讨论,本节将讨论它们的 Poincaré 级数($\nu\geqslant1$)在尖点 i∞处的 Fourier 展式. 大多我们只陈述结论,需要证明和进一步讨论的都留给读者.

(A) $\Gamma_0(N)$的 Poincaré 级数在尖点 i∞处的 Fourier 展式.

在例 22.1 中得到

$$P_\nu(\Gamma_0(N),2k)(z)=\sum_{\sigma\in T_1\backslash\Gamma_0(N)}\frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z))}{(cz+d)^{2k}}$$

$$= \mathrm{e}(\nu z) + \sum_{\substack{c \equiv 0(N) \\ c>0}} \sum_{(c,d)=1} \frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z))}{(cz+d)^{2k}},$$

这里 $T_1\backslash\Gamma_0(N)$的右陪集代表系是取为

$$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N): N|c,(c,d) = 1, c \geqslant 0;$$

$$\text{当 } c = 0 \text{ 时, 取 } d = 1,$$

其中 a,b 任意取定. 当 $c>0$ 时,d 可按模 c 的剩余类来取值,注意到对取定的 c 和 d 及由上式给出的代表元,相应于 c 和 $d+rc$ 代表元可取为

$$\begin{bmatrix} a & b+ra \\ c & d+rc \end{bmatrix},$$

因此推出

$$P_\nu(\Gamma_0(N),2k)(z)$$

$$= \mathrm{e}(\nu z) + \sum_{\substack{c \equiv 0(N) \\ c>0}} \sum_{d(\mathrm{mod}\, c),(c,d)=1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z+r))}{(c(z+r)+d)^{2k}}. \tag{24.1}$$

它以 1 为周期,所以在尖点 i∞处的 Fourier 展式是

$$P_\nu(\Gamma_0(N),2k)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{P}_{\nu,0}(n)\mathrm{e}(nz), \tag{24.2}$$

$$\hat{P}_{\nu,0}(n) = \hat{P}_\nu(n;\Gamma_0(N),2k) = \int_{\mathrm{i}}^{1+\mathrm{i}} P_\nu(\Gamma_0(N),2k)(z)\mathrm{e}(-nz)\mathrm{d}z, \tag{24.3}$$

这里的积分路径取连接 i 和 1+i 的直线段. 由此及式(24.1)得

$$\hat{P}_{\nu,0}(n) = \delta_{\nu n} + \sum_{\substack{c \equiv 0(N) \\ c>0}} \sum_{d(\mathrm{mod}\, c),(c,d)=1} \int_{-\infty+\mathrm{i}}^{\infty+\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}(-nz+\nu\sigma(z))}{(cz+d)^{2k}}\mathrm{d}z$$

$$= \delta_{\nu n} + \sum_{\substack{c \equiv 0(N) \\ c>0}} \sum_{d(\mathrm{mod}\, c),(c,d)=1} \mathrm{e}(a\nu/c)$$

$$\cdot \int_{-\infty+\mathrm{i}}^{\infty+\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}\left(-nz - \dfrac{\nu}{c^2(z+d/c)}\right)}{(cz+d)^{2k}}\mathrm{d}z$$

$$= \delta_{\nu n} + \sum_{c \equiv 0(N),c>0} \sum_{d(\mathrm{mod}\, c),(c,d)=1} \mathrm{e}((d^{-1}\nu + dn)/c)c^{-2k}$$

$$\cdot \int_{-\infty+\mathrm{i}}^{\infty+\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}\left(-nz-\dfrac{\nu}{c^2z}\right)}{z^{2k}}\mathrm{d}z, \tag{24.4}$$

这里

$$\delta_{\nu n}=1,\quad 当\ \nu=n;\quad \delta_{\nu n}=0,\quad 当\ \nu\neq n, \tag{24.5}$$

并用到了 $\sigma\in\Gamma,\sigma(z)=(az+b)/(cz+d),c>0$ 时有

$$\sigma(z)=a/c-1/(c(z+d)),\quad ad\equiv 1(\mathrm{mod}\,c),$$

以及 d^{-1}表示 d 关于模 c 的逆元素，即 $d^{-1}d\equiv 1(\mathrm{mod}\,c)$. 式(24.4)当 $\nu=0$ 时也成立.

当 $\nu\geqslant 1$ 时，利用 Bessel 函数性质（见王竹溪、郭敦仁，特殊函数概论，北京大学出版社，§7.4 式(19)）可得：当 $l\geqslant 2$ 时，

$$\int_{-\infty+\mathrm{i}}^{\infty+\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}\left(-nz-\dfrac{\nu}{c^2z}\right)}{z^{l}}\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi l/2}(nc^2/\nu)^{(l-1)/2}J_{l-1}(4\pi(n\nu)^{1/2}/c),\quad \nu\neq 0. \tag{24.6}$$

这样，就推出

$$\hat{P}_{\nu,0}(n)=\delta_{\nu n}+(-1)^k2\pi(n/\nu)^{k-1/2}\sum_{c\equiv 0(N),c>0}c^{-1}J_{2k-1}(4\pi(n\nu)^{1/2}/c)$$
$$\cdot\sum_{d(\mathrm{mod}\,c),(c,d)=1}\mathrm{e}((d^{-1}\nu+dn)/c)$$
$$=\delta_{\nu n}+(-1)^k2\pi(n/\nu)^{k-1/2}$$
$$\cdot\sum_{c\equiv 0(N),c>0}c^{-1}K(c;n,\nu)J_{2k-1}(4\pi(n\nu)^{1/2}/c), \tag{24.7}$$

这里我们记

$$K(c;n,\nu)=\sum_{d(\mathrm{mod}\,c),(c,d)=1}\mathrm{e}((d^{-1}\nu+dn)/c), \tag{24.8}$$

它称为 **Kloosterman 和**.

当 $\nu=0$ 时，由式(24.4)得

$$\hat{P}_{0,0}(n)=\delta_{0n}+I_{2k}(n)\sum_{c\equiv 0(N),c>0}c^{-2k}K(c;n,0), \tag{24.9}$$

这里

$$I_l(n)=\int_{-\infty+\mathrm{i}}^{\infty+\mathrm{i}}\mathrm{e}(-nz)z^{-l}\mathrm{d}z,\quad l\geqslant 2. \tag{24.10}$$

利用熟知的留数方法计算复变积分可得(证明留给读者)：$I_l(0)=0$，

$$I_l(1) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi l/2}(2\pi)^l/(l-1)! = a(l),$$

$$I_l(n) = n^{l-1}I_l(1), \quad n \geqslant 1, \tag{24.11}$$

这里的 $a(l)$ 见式(5.36). 注意到(证明留给读者)

$$K(c;n,0) = \sum_{d(\bmod c),(c,d)=1} \mathrm{e}(dn/c) = \sum_{t\mid(c,n)} t\mu(c/t),$$

因而有

$$\hat{P}_{0,0}(n) = 1 + a(2k)n^{2k-1}\sum_{c\equiv 0(N),c>0} c^{-2k}\sum_{t\mid(c,n)} t\mu(c/t). \tag{24.12}$$

当 $N=1$ 时，容易算出(留给读者)

$$n^{2k-1}\sum_{c>0} c^{-2k}\sum_{t\mid(c,n)} t\mu(c/t) = \sigma_{2k-1}(n)/\zeta(2k). \tag{24.13}$$

由以上两式及式(24.2)就再一次证明了定理 5.5. 当 $N>1$ 时，要计算式(24.12)中的二重和，这也就再一次证明了定理 23.8(留给读者).

(B) $\Gamma_1(N)$ 的 Poincaré 级数在尖点 $\mathrm{i}\infty$ 处的 Fourier 展式.

因为 $\Gamma_1(2)=\Gamma_0(2)$，所以可假定 $N>2$. 类似于(A)，由例 22.2 可得

$$\begin{aligned} P_\nu(\Gamma_1(N),k)(z) &= \sum_{\sigma\in T_1^+\backslash\Gamma_1(N)} \frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z))}{(cz+d)^k} \\ &= \mathrm{e}(\nu z) + \sum_{c\equiv 0(N),c\neq 0}\ \sum_{(c,d)=1,d\equiv 1(N)} \frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z))}{(cz+d)^k} \\ &= \mathrm{e}(\nu z) + \sum_{c\equiv 0(N),c\neq 0}\ \sum_{\substack{d(\bmod |c|),(c,d)=1\\ d\equiv 1(N)}}\ \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z+r))}{(c(z+r)+d)^k}. \end{aligned} \tag{24.14}$$

它以 1 为周期，所以在尖点 $\mathrm{i}\infty$ 处的 Fourier 展式是

$$P_\nu(\Gamma_1(N),k)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{P}_{\nu,1}(n)\mathrm{e}(nz), \tag{24.15}$$

$$\hat{P}_{\nu,1}(n) = \hat{P}_\nu(n;\Gamma_1(N),k) = \int_{\mathrm{i}}^{1+\mathrm{i}} P_\nu(\Gamma_1(N),k)(z)\mathrm{e}(-nz)\mathrm{d}z, \tag{24.16}$$

这里的积分路径取连接 i 和 $1+\mathrm{i}$ 的直线段. 与式(24.4)的推导相同，

由此及式(24.14)得

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\nu,1}(n) &= \delta_{\nu n} + \sum_{c\equiv 0(N),c\neq 0}\ \sum_{\substack{d(\mathrm{mod}\ |c|),(c,d)=1\\ d\equiv 1(N)}} \int_{-\infty+\mathrm{i}}^{\infty+\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}(-nz+\nu\sigma(z))}{(cz+d)^k}\mathrm{d}z \\ &= \delta_{\nu n} + \sum_{c\equiv 0(N),c\neq 0}\ \sum_{\substack{d(\mathrm{mod}\ |c|),(c,d)=1\\ d\equiv 1(N)}} \mathrm{e}(a\nu/c) \\ &\quad \cdot \int_{-\infty+\mathrm{i}}^{\infty+\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}\left(-nz-\dfrac{\nu}{c^2(z+d/c)}\right)}{(cz+d)^k}\mathrm{d}z \\ &= \delta_{\nu n} + \sum_{c\equiv 0(N),c\neq 0}\ \sum_{\substack{d(\mathrm{mod}\ |c|),(c,d)=1\\ d\equiv 1(N)}} \mathrm{e}((d^{-1}\nu+dn)/c)c^{-k} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty+\mathrm{i}}^{\infty+\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}\left(-nz-\dfrac{\nu}{c^2z}\right)}{z^k}\mathrm{d}z,\end{aligned} \tag{24.17}$$

这里 $d^{-1}d\equiv 1(\mathrm{mod}\ |c|)$.

当 $\nu\geqslant 1$ 时,利用式(24.6)即得

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\nu,1}(n) &= \delta_{\nu n} + 2\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi k/2}(n/\nu)^{(k-1)/2} \\ &\quad \cdot \sum_{c\equiv 0(N),c\neq 0} c^{-1}K_N(c;n,\nu)J_{k-1}(4\pi(n\nu)^{1/2}/c),\end{aligned} \tag{24.18}$$

$$K_N(c;n,\nu) = \sum_{\substack{d(\mathrm{mod}\ |c|),(c,d)=1\\ d\equiv 1(N)}} \mathrm{e}((d^{-1}\nu+dn)/c),\quad c\neq 0. \tag{24.19}$$

$K_N(c;n,\nu)$也称为 Kloosterman 和.

当 $\nu=0$ 时,由式(24.17)得

$$\begin{aligned}\hat{P}_{0,1}(n) &= \delta_{0n} + I_k(n)\sum_{c\equiv 0(N),c\neq 0} c^{-k} \sum_{\substack{d(\mathrm{mod}\ |c|),(c,d)=1\\ d\equiv 1(N)}} \mathrm{e}(dn/c) \\ &= \delta_{0n} + I_k(1)n^{k-1}\sum_{c\equiv 0(N),c\neq 0} c^{-k}K_N(c;n,0),\end{aligned} \tag{24.20}$$

其中 $I_k(1)$由式(24.11)给出.

(C) $\Gamma(N)$的 Poincaré 级数在尖点 i∞处的 Fourier 展式.

我们讨论 $N>2$ 的情形($\Gamma(2)$的情形留给读者讨论). $T_N^+\backslash\Gamma(N)$的右陪集代表系可取为

$$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma(N):N|c,\ (c,d)=1,\ d\equiv 1(\mathrm{mod}\,N),$$

其中 a,b 任意取定. 当 $c\neq 0$ 时,d 可按模 $|Nc|$ 的剩余类来取值,注意到对取定的 c 和 d 及代表元由上式给出时,相应于 c 和 $d+rNc$ 的代表元可取为

$$\begin{bmatrix} a & b+rNa \\ c & d+rNc \end{bmatrix},$$

这样,类似于(A),由例 22.3 可得

$$\begin{aligned} P_\nu(\Gamma(N),k)(z) &= \sum_{\sigma\in T_N^+\backslash\Gamma(N)} \frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z)/N)}{(cz+d)^k} \\ &= \mathrm{e}(\nu z/N) + \sum_{c\equiv 0(N),c\neq 0}\ \sum_{\substack{d(\mathrm{mod}\,|Nc|),(c,d)=1\\ d\equiv 1(N)}} \frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z)/N)}{(cz+d)^k} \\ &= \mathrm{e}(\nu z/N) + \sum_{c\equiv 0(N),c\neq 0}\ \sum_{\substack{d(\mathrm{mod}\,|Nc|),(c,d)=1\\ d\equiv 1(N)}} \\ &\quad \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}(\nu\sigma(z+rN)/N)}{(c(z+rN)+d)^k}. \end{aligned} \qquad (24.21)$$

它以 N 为周期,所以(在尖点 $\mathrm{i}\infty$ 处)的 Fourier 展式是

$$P_\nu(\Gamma(N),k)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{P}_\nu(n)\mathrm{e}(nz/N), \qquad (24.22)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_\nu(n) &= \hat{P}_\nu(n;\Gamma(N),k) \\ &= N^{-1}\int_{\mathrm{i}}^{N+\mathrm{i}} P_\nu(\Gamma(N),k)(z)\mathrm{e}(-nz/N)\mathrm{d}z, \end{aligned} \qquad (24.23)$$

这里的积分路径取连接 i 和 $N+\mathrm{i}$ 的直线段. 与式(24.4)的推导相同,由此及式(24.21)得

$$\begin{aligned} \hat{P}_\nu(n) &= \delta_{\nu n} + N^{-1} \sum_{c\equiv 0(N),c\neq 0}\ \sum_{\substack{d(\mathrm{mod}\,|Nc|),(c,d)=1\\ d\equiv 1(N)}} \int_{-\infty+\mathrm{i}}^{\infty+\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}((-nz+\nu\sigma(z))/N)}{(cz+d)^k}\mathrm{d}z \\ &= \delta_{\nu n} + N^{-1} \sum_{c\equiv 0(N),c\neq 0} c^{-k} \sum_{\substack{d(\mathrm{mod}\,|Nc|),(c,d)=1\\ d\equiv 1(N)}} \mathrm{e}((d^{-1}\nu + dn)/Nc) \\ &\quad \cdot \int_{-\infty+\mathrm{i}}^{\infty+\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}\left(-\frac{1}{N}\left(nz+\frac{\nu}{c^2 z}\right)\right)}{z^k}\mathrm{d}z, \end{aligned} \qquad (24.24)$$

这里 $d^{-1}d\equiv 1(\mathrm{mod}\ |Nc|)$.

当 $\nu\geqslant 1$ **时**,利用式(24.6)即得

$$\hat{P}_{\nu(n)}=\delta_{\nu n}+2\pi e^{-\mathrm{i}\pi k/2}(n/\nu)^{(k-1)/2}\sum_{c\equiv 0(N),c\neq 0}(|c|/c)^{k-1}$$

$$\cdot(Nc)^{-1}K_N(Nc;n,\nu)J_{k-1}(4\pi(n\nu)^{1/2}/|Nc|),\tag{24.25}$$

这里 $K_N(Nc;n,\nu)$ 由式(24.19)给出.

当 $\nu=0$ **时**,由式(24.24)得

$$\hat{P}_0(n)=\delta_{0n}+I_k(1)n^{k-1}\sum_{c\equiv 0(N),c\neq 0}(cN)^{-k}K_N(Nc;n,0).\tag{24.26}$$

以上十分简单地讨论了最基本的同余子群 $\Gamma(N)$,$\Gamma_1(N)$和 $\Gamma_0(N)$ 的 Poincaré 级数在尖点 i∞处的 Fourier 展式.可以清楚地看出,这些 Fourier 展式的系数与 Bessel 函数,特别是 Kloosterman 和有紧密联系. Fourier 展式的系数估计在模形式理论中是十分重要的,因此,指数和估计在模形式理论中占有极其重要的地位.

问　　题

1. 证明式(22.2),(22.2′)及(22.2″).
2. 证明式(22.18),(22.19)及(22.20).
3. 证明定理 22.2 及其有关说明(a)和(b).
4. 证明定理 22.3.
5. 证明式(22.38)及(22.38′).
6. 证明定理 22.6.
7. 详细补出例 22.1,例 22.2 和例 22.3 中所需要的证明.
8. 设一组数对(u_j,v_j),$1\leqslant j\leqslant r$,满足

$$(u_i,v_i)\not\equiv(u_j,v_j)(\mathrm{mod}\ N),\quad 1\leqslant i\neq j\leqslant r,$$

$$(2u_j,2v_j)\not\equiv(0,0)(\mathrm{mod}\ N),\quad 1\leqslant j\leqslant r.$$

那么,由式(23.15)给出的 Eisenstein 级数 $E_k(z_j;u_j,v_j,N)$($1\leqslant j\leqslant r$)线性无关.

9. 补出定理 23.1 的(i),(ii)和(iv)的证明.

10. 证明定理 23.2.

11. 求 $E_k(z;\Gamma(N))(=E_k(z;\Gamma_1(N)))$及 $E_k(z;u,v,N)$在尖点 $i\infty$ 的 Fourier 展式.

12. 补出 § 24 所举的例子中的结论所需要的证明.

13. 求出 $\Gamma(2)$在各尖点处的 Eisenstein 级数.

14. 求 $G_{2k}(z;2,1,4)$和 $G_{2k}(z;2,-1,4)$在 $i\infty$处的零点的阶.

第八章　完全模群的模形式空间上的 Hecke 算子

Hecke 算子是研究模形式的重要工具. 本章讨论完全模群的模形式空间上的 Hecke 算子. §25 讨论它的基本性质, §26 将证明完全模群的模形式空间上的 Hecke 算子是 Petersson 内积的自伴算子,并进而得到有关完全模群的模形式空间的基的重要结论.

§25　完全模群的 Hecke 算子的基本性质

对任一 $\alpha\in GL_2^+(\mathbf{Z})$,双陪集 $\Gamma\alpha\Gamma$ 有右陪集分解(参看定义34.2)

$$\Gamma\alpha\Gamma=\bigcup_{\sigma\in\Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma}\Gamma\sigma. \tag{25.1}$$

设 k 是整数. 这样,对 $f\in V_{2k}(\Gamma)$ 相应地可确定如下的运算

$$|\alpha|^{(2k)/2-1}\sum_{\sigma\in\Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma}f\circ[\sigma]_{2k}. \tag{25.2}$$

显见,这样定义的运算与(25.1)中的右陪集分解代表系$\{\sigma\}$的具体取法无关(为什么). 因此,我们可用以下两种符号来表示这同一运算:

$$T(\alpha)=T(\alpha;\Gamma,2k),\quad [\Gamma\alpha\Gamma]_{2k}=|\alpha|^{(2k)/2-1}\sum_{\sigma\in\Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma}[\sigma]_{2k}, \tag{25.3}$$

前一种符号是左作用于 f,后一种符号是右作用于 f,即

$$\begin{aligned}T(\alpha)f&=T(\alpha;\Gamma,2k)f=f\circ[\Gamma\alpha\Gamma]_{2k}\\&=f\circ\Big(|\alpha|^{(2k)/2-1}\sum_{\sigma\in\Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma}[\sigma]_{2k}\Big)\\&=|\alpha|^{(2k)/2-1}\sum_{\sigma\in\Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma}f\circ[\sigma]_{2k}.\end{aligned} \tag{25.4}$$

这两类符号各有优点,以后将交替使用.

定义 25.1　设 $\alpha\in GL_2^+(\mathbf{Z})$. 由双陪集 $\Gamma\alpha\Gamma$ 确定的,式(25.4)所给出的运算称为是**完全模群 Γ 的模函数空间** $V_{2k}(\Gamma)$**上的** Hecke **算**

子，简称为**完全模群 Γ 上的 Hecke 算子**. 一般的，设 $c_1,\cdots,c_J$ 是复数，$\alpha_1,\cdots,\alpha_J\in \mathrm{GL}_2^+(\mathbf{Z})$. 我们定义完全模群 Γ 的模函数空间 $V_{2k}(\Gamma)$ 上的算子：

$$T=\sum_{j=1}^{J}c_jT(\alpha_j):\ Tf=\Big(\sum_{j=1}^{J}c_jT(\alpha_j)\Big)f$$

$$=\sum_{j=1}^{J}c_j(T(\alpha_j)f),\quad f\in V_{2k}(\Gamma),\tag{25.5}$$

它也称为是**完全模群 Γ 的模函数空间 $V_{2k}(\Gamma)$ 上的 Hecke 算子**，简称为**完全模群 Γ 上的 Hecke 算子**. 在本章中说到 Hecke 算子总是指完全模群 Γ 上的 Hecke 算子.

设 T_1,T_2 是两个 Hecke 算子，作为算子它们的**加法**为

$$T_1+T_2:\ (T_1+T_2)f=T_1f+T_2f,\ f\in V_{2k}(\Gamma).\tag{25.6}$$

若

$$T_1=\sum_{j=1}^{J}c_{j,1}T(\alpha_j),\quad T_2=\sum_{j=1}^{J}c_{j,2}T(\alpha_j),\tag{25.7}$$

则

$$T_1+T_2=\sum_{j=1}^{J}(c_{j,1}+c_{j,2})T(\alpha_j).\tag{25.8}$$

所以，全体 Hecke 算子(25.5)组成一个加法群. 容易看出，包含算子 $T(\alpha,\Gamma;2k),\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{Z})$的最小加法群是：

$$H(\Gamma;2k)=H(\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{Z}),\Gamma;2k)$$

$$=\Big\{\sum_{j=1}^{J}c_jT(\alpha_j,\Gamma,2k),c_j\in\mathbf{Z},\alpha_j\in\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{Z}),$$

$$j=1,\cdots,J,J\in\boldsymbol{N}\Big\}.\tag{25.9}$$

通常称这最小加法群为(**完全模群 Γ 上的)Hecke 算子群**.

定理 25.1　由式(25.5)定义的完全模群 Γ 上的 Hecke 算子 T 是 $\boldsymbol{C}$ 上的线性空间 $V_{2k}(\Gamma)(A_{2k}(\Gamma),M_{2k}(\Gamma)$，或 $S_{2k}(\Gamma))$到自身的映射，即 $Tf\in V_{2k}(\Gamma)(A_{2k}(\Gamma),M_{2k}(\Gamma)$，或 $S_{2k}(\Gamma))$.

证　设 $\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{Z}),\gamma\in\Gamma$. 由式(25.4)知

$$(T(\alpha)f)\circ[\gamma]_{2k}=|\alpha|^{k-1}\sum_{\sigma\in\Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma}[\sigma\gamma]_{2k}=T(\alpha)f.$$

最后一步用到了$\{\sigma\}$和$\{\sigma\gamma\}$必同为$\Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma$的一组右陪集分解代表系. 由此及性质 15.12 就推出所要的结论. 证毕.

由定理 25.1 知可定义 **Hecke 算子的乘法**：

$$(T(\alpha_2)T(\alpha_1))f = T(\alpha_2)(T(\alpha_1)f). \tag{25.10}$$

这样，若
$$T(\alpha_1) = |\alpha_1|^{(2k)/2-1}\sum_{\sigma_1\in\Gamma\backslash\Gamma\alpha_1\Gamma}[\sigma_1]_{2k},$$
$$T(\alpha_2) = |\alpha_2|^{(2k)/2-1}\sum_{\sigma_2\in\Gamma\backslash\Gamma\alpha_2\Gamma}[\sigma_2]_{2k},$$

则
$$\begin{aligned}(T(\alpha_2)T(\alpha_1))f &= T(\alpha_2)(T(\alpha_1)f)\\ &= \Big(f\circ\Big(|\alpha_1|^{(2k)/2-1}\sum_{\sigma_1\in\Gamma\backslash\Gamma\alpha_1\Gamma}[\sigma_1]_{2k}\Big)\Big)\\ &\quad\circ\Big(|\alpha_2|^{(2k)/2-1}\sum_{\sigma_2\in\Gamma\backslash\Gamma\alpha_2\Gamma}[\sigma_2]_{2k}\Big)\\ &= f\circ\Big(|\alpha_1\alpha_2|^{(2k)/2-1}\sum_{\sigma_1\in\Gamma\backslash\Gamma\alpha_1\Gamma}\ \sum_{\sigma_2\in\Gamma\backslash\Gamma\alpha_2\Gamma}[\sigma_1\sigma_2]_{2k}\Big).\end{aligned} \tag{25.11}$$

由此及性质 15.2 知 Hecke 算子的乘法满足结合律(证明留给读者)：

$$T(\alpha_3)(T(\alpha_2)T(\alpha_1)) = (T(\alpha_3)T(\alpha_2))T(\alpha_1). \tag{25.12}$$

一般的，可以同样定义由式(25.5)给出的 Hecke 算子的乘法：

$$(T_2T_1)f = T_2(T_1f). \tag{25.13}$$

它也满足结合律. 若T_1, T_2由式(25.7)给出，则有

$$T_2T_1 = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{J}c_{j,2}c_{i,1}T(\alpha_j)T(\alpha_i). \tag{25.14}$$

以上我们定义了 Hecke 算子的乘法和加法运算. 由这样的乘法和加法运算，当然可以生成一个环. 但重要的问题是：Hecke 算子的乘积是否仍是原来定义的 Hecke 算子呢？回答是肯定的，但证明并不容易. 在 §27 讨论同余子群的 Hecke 算子时，我们将给出直接的一般证明，而完全模群的情形就作为特例推出. 但在本节将通过具体讨论完全模群的 Hecke 算子$T(\alpha)$的构造，及完全模群的一类重要的 Hecke 算子

$$T(n) = \sum_{l^2|n}T(l, n/l),\quad n\in N \tag{25.15}$$

的性质来证明这一结论，其中

$$T(a,d) = T\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right), \quad a,d \in \boldsymbol{N}. \tag{25.16}$$

我们将证明

定理 25.2 (i) 全体由式(25.15)定义的完全模群的 Hecke 算子 $T(n)(n=1,2,3,\cdots)$的整系数有限和组成的集合是一个环，这个环就是由式(25.9)给出的完全模群的 Hecke 算子组成的集合 $H(\Gamma;2k)$，它称为**完全模群的 Hecke 算子环**；

(ii) 由式(25.5)给出的完全模群的 Hecke 算子组成的集合也是一个环.

在给出证明之前，先来讨论 $T(\alpha)$和 $T(n)$.

定理 25.3 我们有

$$T(al,dl) = T(l,l)T(a,d) = l^{2k-2}T(a,d),$$
$$T(l,l)f = l^{2k-2}f, \quad l \in \boldsymbol{N}, \tag{25.17}$$

及

$$T(1,n) = \sum_{d^2 \mid n} \mu(d) d^{2k-2} T(n/d^2). \tag{25.18}$$

证 (25.17)的证明留给读者. 利用 Möbius 函数，由式(25.17)可得

$$\begin{aligned} T(1,n) &= \sum_{l^2 \mid n} T(l,n/l) \sum_{d \mid l} \mu(d) \\ &= \sum_{d^2 \mid n} \mu(d) T(d,d) \sum_{t^2 \mid n/d^2} T(t,n/(td^2)) \\ &= \sum_{d^2 \mid n} \mu(d) T(d,d) T(n/d^2) \\ &= \sum_{d^2 \mid n} \mu(d) d^{2k-2} T(n/d^2). \end{aligned}$$

定理 25.4 (i) 若 $\alpha \in M^*(n)$，则

$$T(\alpha) = T(1,n) = n^{k-1} \sum_{\substack{a \mid n, b (\mathrm{mod}\, n/a) \\ (b,a,n/a)=1}} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & n/a \end{pmatrix}\right]_{2k}^{①}; \tag{25.19}$$

① 为了和运算符号$[\ ]_k$相区别，在第八、九章中矩阵符号有时用圆括号.

(ii) 若 $\alpha\in M(n)$, $l=\gcd(\alpha)$，则

$$T(\alpha)=T(l,n/l)=T(l,l)T(1,n/l^2)=l^{2k-2}T(1,n/l^2). \tag{25.20}$$

(iii)
$$T(n)=n^{k-1}\sum_{a\mid n,\, b(\mathrm{mod}\, n/a)}\left[\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & n/a\end{pmatrix}\right]_{2k}. \tag{25.21}$$

证 由定理 34.4($N=r=1$)知，当 $\alpha\in M^*(n)$ 时有

$$M^*(n)=\Gamma\alpha\Gamma=\Gamma\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & n\end{bmatrix}\Gamma. \tag{25.22}$$

由此利用定理 34.9(ii)($N=r=1$)，式(25.2)和(25.16)，就推出式(25.19). 下面来证(ii). 由上式及(ii)的条件知

$$\Gamma\alpha\Gamma=\begin{bmatrix}l & 0\\ 0 & l\end{bmatrix}\Gamma\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & n/l^2\end{bmatrix}\Gamma=\Gamma\begin{bmatrix}l & 0\\ 0 & n/l\end{bmatrix}\Gamma. \tag{25.23}$$

由此及式(25.2)和(25.16)，容易验证式(25.20)成立(留给读者)，这里要用到：当 $\{\sigma\}$ 是 $\Gamma\backslash\Gamma(l^{-1}\alpha)\Gamma$ 的右陪集分解代表系时，$\{l\sigma\}$ 是 $\Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma$ 的右陪集分解代表系. 最后来证(iii). 由式(34.11)($N=r=1$)和(25.22)知

$$M(n)=\bigcup_{l^2\mid n}\Gamma\begin{bmatrix}l & 0\\ 0 & n/l\end{bmatrix}\Gamma. \tag{25.24}$$

因而有(注意到式(25.1)和(25.16))

$$\sum_{\sigma\in\Gamma\backslash M(n)}f\circ[\sigma]_{2k}=\sum_{l^2\mid n}T(l,n/l)f. \tag{25.25}$$

利用定理 34.9(i)($N=r=1$)及式(25.15)，推出式(25.21). 证毕.

由定理 25.4，式(25.15)及(25.18)，立即看出为了证明属于 $H(\Gamma;2k)$ 的完全模群的 Hecke 算子的乘积仍是属于 $H(\Gamma;2k)$ 的 Hecke 算子等价于证明完全模群的 Hecke 算子 $T(n)$ 的乘积仍是这样的 Hecke 算子的整系数的有限和. 下面就来证明这一结论，由此也就推出定理 25.2.

定理 25.5 我们有

$$T(m)T(n)=\sum_{g\mid(m,n)}gT(g,g)T(mn/g^2)=\sum_{g\mid(m,n)}g^{2k-1}T(mn/g^2). \tag{25.26}$$

因而，Hecke 算子 $T(n)$ 的乘法是可交换的，即

$$T(m)T(n)=T(n)T(m), \tag{25.27}$$

以及

$$T(m)T(n)=T(mn),\quad (m,n)=1. \tag{25.28}$$

证　由式(25.21)知(式(25.3)中的两类符号在下面同时运用，并省略下标 $2k$)，

$$T(m)T(n)=\left\{n^{k-1}\sum_{\substack{a_1\mid n\\ b_1(\mathrm{mod}\,n/a_1)}}\left[\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ 0 & n/a_1\end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$\circ\left\{m^{k-1}\sum_{\substack{a_2\mid m\\ b_2(\mathrm{mod}\,m/a_2)}}\left[\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ 0 & m/a_2\end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$=(mn)^{k-1}\sum_{\substack{a_1\mid n\\ b_1(\mathrm{mod}\,n/a_1)}}\sum_{\substack{a_2\mid m\\ b_2(\mathrm{mod}\,m/a_2)}}\left[\begin{pmatrix}a_1a_2 & a_1b_2+mb_1/a_2\\ 0 & nm/(a_1a_2)\end{pmatrix}\right].$$

设

$$(a_1,m/a_2)=g,\quad a_1=ga_1',\quad n=gn',\quad m=gm'. \tag{25.29}$$

我们有

$$T(m)T(n)=\sum_{g\mid(m,n)}(g^2m'n')^{k-1}$$

$$\cdot\sum_{\substack{a_1'\mid n'\\ b_1(\mathrm{mod}\,n'/a_1')}}\sum_{\substack{a_2\mid m'\\ b_2(\mathrm{mod}\,gm'/a_2)}}^{*}\left[g\begin{pmatrix}a_1'a_2 & a_1'b_2+m'b_1/a_2\\ 0 & m'n'/(a_1'a_2)\end{pmatrix}\right],$$

其中求和条件 * 表示

$$(a_1',m'/a_2)=1. \tag{25.30}$$

进而，利用算子$[\alpha]$的结合性及完全剩余系的性质，我们有

$$T(m)T(n)=\sum_{g\mid(m,n)}g^{2k-2}(m'n')^{k-1}$$

$$\cdot\sum_{\substack{a_1'\mid n'\\ b_1(\mathrm{mod}\,n'/a_1')}}\sum_{\substack{a_2\mid m'\\ b_2(\mathrm{mod}\,gm'/a_2)}}^{*}\left[\begin{pmatrix}a_1' & b_1\\ 0 & n'/a_1'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ 0 & m'/a_2\end{pmatrix}\right]$$

$$= \sum_{g|(m,n)} g^{2k-2}(m'n')^{k-1}\left\{ \sum_{\substack{a_1'|n' \\ b_1 (\operatorname{mod} n'/a_1')}} \left[\begin{pmatrix} a_1' & b_1 \\ 0 & n'/a_1' \end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$\circ \left\{ \sum_{\substack{a_2|m' \\ b_2 (\operatorname{mod} gm'/a_2)}}{}^{*} \left[\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & m'/a_2 \end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$= \sum_{g|(m,n)} g^{2k-2}(m'n')^{k-1}\left\{ \sum_{\substack{a_1'|n' \\ b_1 (\operatorname{mod} n'/a_1')}} \left[\begin{pmatrix} a_1' & b_1 \\ 0 & n'/a_1' \end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$\circ \left\{ \sum_{j=0}^{g-1} \sum_{\substack{a_2|m' \\ b_2' (\operatorname{mod} m'/a_2)}}{}^{*} \left[\begin{pmatrix} a_2 & b_2' + jm'/a_2 \\ 0 & m'/a_2 \end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$= \sum_{g|(m,n)} g^{2k-2}(m'n')^{k-1}\left\{ \sum_{\substack{a_1'|n' \\ b_1 (\operatorname{mod} n'/a_1')}} \left[\begin{pmatrix} a_1' & b_1 \\ 0 & n'/a_1' \end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$\circ \left\{ \sum_{j=0}^{g-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\right\} \circ \left\{ \sum_{\substack{a_2|m' \\ b_2' (\operatorname{mod} m'/a_2)}}{}^{*} \left[\begin{pmatrix} a_2 & b_2' \\ 0 & m'/a_2 \end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$= \sum_{g|(m,n)} g^{2k-2}(m'n')^{k-1} \sum_{j=0}^{g-1} \left\{ \sum_{\substack{a_1'|n' \\ b_1 (\operatorname{mod} n'/a_1')}} \left[\begin{pmatrix} a_1' & b_1 + ja_1' \\ 0 & n'/a_1' \end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$\circ \left\{ \sum_{\substack{a_2|m' \\ b_2' (\operatorname{mod} m'/a_2)}}{}^{*} \left[\begin{pmatrix} a_2 & b_2' \\ 0 & m'/a_2 \end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$= \sum_{g|(m,n)} g^{2k-1}(m'n')^{k-1}\left\{ \sum_{\substack{a_1'|n' \\ b_1 (\operatorname{mod} n'/a_1')}} \left[\begin{pmatrix} a_1' & b_1 \\ 0 & n'/a_1' \end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$\circ \left\{ \sum_{\substack{a_2|m' \\ b_2' (\operatorname{mod} m'/a_2)}}{}^{*} \left[\begin{pmatrix} a_2 & b_2' \\ 0 & m'/a_2 \end{pmatrix}\right]\right\},$$

这里用到了对固定的 j 和 a_1'，b_1 和 b_1+ja_1' 同时遍历模 n'/a_1' 的完全剩余系，及由式(25.21)知

$$(n')^{k-1}\sum_{\substack{a_1'|n' \\ b_1(\mathrm{mod}\, n'/a_1')}}\left[\begin{pmatrix} a_1' & b_1+ja_1' \\ 0 & n'/a_1' \end{pmatrix}\right]=T(n')$$

$$=(n')^{k-1}\sum_{\substack{a_1'|n' \\ b_1(\mathrm{mod}\, n'/a_1')}}\left[\begin{pmatrix} a_1' & b_1 \\ 0 & n'/a_1' \end{pmatrix}\right].$$

进而得到

$$T(m)T(n)$$

$$=\sum_{g|(m,n)}g^{2k-1}\left\{(m'n')^{k-1}\sum_{\substack{a_1'|n' \\ b_1(\mathrm{mod}\, n'/a_1')}}\sum_{\substack{a_2|m' \\ b_2'(\mathrm{mod}\, m'/a_2)}}^{*}\left[\begin{pmatrix} a_1'a_2 & a_1'b_2'+m'b_1/a_2 \\ 0 & m'n'/(a_1'a_2) \end{pmatrix}\right]\right\}.$$

$$(25.31)$$

由条件(25.30)知，当 b_1 和 b_2' 分别遍历模 n'/a_1' 和 m'/a_2 的完全剩余系时，$a_1'b_2'+m'b_1/a_2$ 遍历 $m'n'/(a_1'a_2)$的完全剩余系(为什么)，以及对任一 $a|m'n'$，必可惟一分解为 $a=a_1'a_2$，满足

$$a_2|m',\quad a_1'|n',\quad (a_1',m'/a_2)=1. \tag{25.32}$$

(事实上，取 $a_2=(m',a)$). 由此及式(25.29)，(25.21)就推出(注意 $m'n'=mn/g^2$)

$$T(m)T(n)=\sum_{g|(m,n)}g^{2k-1}\left\{(m'n')^{k-1}\sum_{\substack{a|m'n' \\ b(\mathrm{mod}\, m'n'/a)}}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & m'n'/a \end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$=\sum_{g|(m,n)}g^{2k-1}T\left(\frac{mn}{g^2}\right).$$

由此及式(25.17)就推出所要结论.

由定理 25.5 立即得到

推论 25.6 设 p 是素数. 那么，$T(p^r)$是 $T(p)$的 r 次整系数多项式.

证 $r=0$ 时结论显然成立；$r>0$ 时，由定理 25.5 知

$$\begin{aligned}T(p)T(p^r)&=T(p^{r+1})+p^{2k-1}T(p^{r-1})\\&=T(p^{r+1})+pT(p,p)T(p^{r-1}),\end{aligned}\tag{25.33}$$

由此用归纳法就推出所要结论.

显见，式(25.33)等价于形式幂级数恒等式

$$(1 - T(p)X + p^{2k-1}X^2)\sum_{r=0}^{\infty}T(p^r)X^r \equiv 1, \qquad (25.34)$$

即

$$(1 - T(p)X + pT(p,p)X^2)\sum_{r=0}^{\infty}T(p^r)X^r \equiv 1. \quad (25.34')$$

若令 $X=p^{-s}$,则上述两式变为

$$\sum_{r=0}^{\infty}T(p^r)p^{-sr} = (1 - T(p)p^{-s} + p^{2k-1}p^{-2s})^{-1}$$

$$= (1 - T(p)p^{-s} + pT(p,p)p^{-2s})^{-1}. \qquad (25.35)$$

由此即得

推论 25.7　定理 25.5 的解析等价形式是以 $T(n)$ 为系数的形式 Dirichlet 级数有如下的 Euler 恒等式成立：

$$\sum_{n=1}^{\infty}T(n)n^{-s} = \prod_{p}(1 - T(p)p^{-s} + pT(p,p)p^{-2s})^{-1}. \qquad (25.36)$$

因此,完全模群的 Hecke 算子环是由 $T(p)$ 和 $T(p,p)$ 生成的.

下面来讨论 $T(n)f$ 的 Fourier 展式.

定理 25.8　设 $f\in M_{2k}(\Gamma)$,其 Fourier 展式为

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty}c(m)e^{2\pi imz}. \qquad (25.37)$$

那么,$T(n)f$ 的 Fourier 展式为

$$T(n)f(z) = \sum_{r=0}^{\infty}c(r,n)e^{2\pi irz}, \qquad (25.38)$$

其中

$$c(r,n) = \sum_{a\mid(r,n)}a^{2k-1}c(rn/a^2). \qquad (25.39)$$

特别有

$$c(0,n) = \sigma_{2k-1}(n)c(0). \qquad (25.40)$$

证　由式(25.21)和(25.37)得

$$T(n)f(z) = \frac{1}{n}\sum_{a\mid n}a^{2k}\sum_{b=1}^{n/a}f\left(\frac{az+b}{n/a}\right)$$

$$= \sum_{a\mid n}a^{2k-1}\sum_{\substack{m=0\\ n\mid ma}}^{\infty}c(m)e^{2\pi imaz/(n/a)}.$$

令 $l=ma/n$，由此即得式(25.38)．证毕．

作为有限维线性空间 $M_{2k}(\Gamma)$ 上的可交换的线性算子 $T(n)$，$n=1,2,3,\cdots$，我们可讨论它的特征函数，即特征形式．

定义 25.2　设 $f\in M_{2k}(\Gamma)$，不恒为零，及其 Fourier 展式由式(25.37)给出．f 称为是 **Hecke 算子 $T(n)$ 的特征形式**，如果存在常数 λ_n 使得 $T(n)f=\lambda_n f$，λ_n 称为 **Hecke 算子 $T(n)$ 的特征值**；f 称为是 **Hecke 算子的联立特征形式**，如果它是所有的 Hecke 算子 $T(n)$，$n=1,2,3,\cdots$，的特征形式；f 称为是 **Hecke 算子的标准联立特征形式**，如果它是 Hecke 算子的联立特征形式且 $c(1)=1$．

我们来证明

定理 25.9　设 $f\in M_{2k}(\Gamma)$，不恒为零，及其 Fourier 展式由式(25.37)给出．那么，(i) 当 $k=0$ 时，非零常数是 Hecke 算子的联立特征形式，及 $T(n)$ 的特征值是 $\sigma_{-1}(n)$；(ii) 当 $k>1$ 时，f 是 Hecke 算子的标准联立特征形式的充要条件是满足：$c(1)=1$，

$$c(m)c(n)=\sum_{a\mid(m,n)}a^{2k-1}c(mn/a^2),\quad m\geqslant 0,\ n\geqslant 1,\tag{25.41}$$

以及 $T(n)$ 的特征值是 $c(n)$．

证　由定理 25.8 知，f 是 $T(n)$ 的特征形式，特征值为 λ_n 的充要条件是

$$\lambda_n c(m)=\sum_{a\mid(m,n)}a^{2k-1}c(mn/a^2),\quad m\geqslant 0.\tag{25.42}$$

令 $m=1$ 得

$$c(n)=c(1)\lambda_n,\quad n\geqslant 1.\tag{25.43}$$

因此，当 $c(1)=0$ 时，f 是联立特征形式的充要条件是 f 为非零常数，且 $k=0$(为什么)．进而，在式(25.42)中取 $m=0$ 就推出 $T(n)$ 的特征值等于 $\sigma_{-1}(n)$．这就证明了(i)．当 $c(1)=1$ 时，由联立特征形式的定义及以上两式就推出(ii)．

定理 25.10　设 $k>1$，$f\in M_{2k}(\Gamma)$，$f(\mathrm{i}\infty)\neq 0$(即 f 不是尖形式)．那么，f 是 Hecke 算子的标准联立特征形式的充要条件是

$$\begin{aligned}f(z)&=G_{2k}^{*}(z)=(2a(2k))^{-1}G_{2k}(z)\\&=\zeta(2k)/a(2k)+\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(m)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mz}\end{aligned}\tag{25.44}$$

(见定理 5.5),以及 $T(n)$的特征值是 $\sigma_{2k-1}(n)$.

证 设 f 的 Fourier 展式由式(25.37)给出. 由式(25.42),(25.43)及 $c(0)\neq 0$ 知,$f\in M_{2k}(\Gamma)(k>1)$是标准联立特征形式的充要条件是

$$c(1)=1,\quad c(n)=\lambda_n=\sigma_{2k-1}(n),\quad n\geqslant 1.$$

已知 $G_{2k}^*\in M_{2k}(\Gamma)$(见式(15.34)),所以,$f-G_{2k}^*\in M_{2k}(\Gamma)$. 但由上式及式(25.44)得 $f-G_{2k}^*=c(0)-\zeta(2k)/a(2k)$是一常数. 由此及 $k>1$ 就推出 $f-G_{2k}^*$必恒等于零. 证毕.

确定尖形式空间 $S_{2k}(\Gamma)$中的 Hecke 算子的标准联立特征形式,是一个较困难的问题,我们将在下一节讨论. 这里先给出一个简单结果.

定理 25.11 当 $2k=12,16,18,20,22,26$ 时,$S_{2k}(\Gamma)$仅有的标准联立特征形式是

$$(2\pi)^{-12}\Delta(z)G_{2k-12}^*(z),\tag{25.45}$$

这里约定 $G_0^*(z)$恒等于 1. 特别的,$(2\pi)^{-12}\Delta(z)$是 $S_{12}(\Gamma)$的标准联立特征形式.

证 容易看出,一个一维模形式空间或尖形式空间,它的每个元素一定都是联立特征形式. 由定理 17.1 知,在所列出的情形,$S_{2k}(\Gamma)$均是一维的,它的尖形式就是式(25.45)给出的尖形式的常数倍. 由式(5.50)知

$$(2\pi)^{12}\Delta(\mathrm{i}\infty)G_{2k-12}^*(\mathrm{i}\infty)=1,$$

这就证明了所要的结论.

由定理 25.9 和 25.10 立即推出关系式(留给读者):

$$\sigma_{2k-1}(m)\sigma_{2k-1}(n)=\sum_{d\mid(m,n)}d^{2k-1}\sigma_{2k-1}(mn/d^2),\quad k>1.\tag{25.46}$$

由定理 25.9 和 25.11($2k=12$)立即推出关系式(留给读者):

$$\tau(m)\tau(n)=\sum_{d\mid(m,n)}d^{2k-1}\tau(mn/d^2).\tag{25.47}$$

以上两式可以直接证明,但并不容易,特别是式(25.47),这将安排在习题中(式(25.46)见第二章问题 6).

§ 26 完全模群的 Hecke 算子的自伴性、尖形式空间的正交基

本节将证明完全模群的 Hecke 算子是 Petersson 内积的自伴算子，这里要给出两个证法，一是利用双陪集理论（见 § 34），另一则是利用 Poincaré 级数. 进而将证明 $M_{2k}(\Gamma)$和 $S_{2k}(\Gamma)$存在由 Hecke 算子的联立特征形式组成的标准正交基.

定理 26.1 设 $f,g\in M_{2k}(\Gamma)$，且至少有一个是尖形式，以及 $\alpha\in GL_2^+(\mathbf{Z})$. 那么有

$$\langle T(\alpha)f,g\rangle=\langle f,T(\alpha)g\rangle,\tag{26.1}$$

即 Hecke 算子 $T(\alpha)$是 Petersson 内积的自伴算子.

证 设有双陪集分解

$$\Gamma\alpha\Gamma=\bigcup_{j=1}^{d(\alpha)}\Gamma\alpha\eta_j,\quad \eta_j\in\Gamma,\quad 1\leqslant j\leqslant d(\alpha),$$

利用定理 21.10($\Gamma'=\Gamma$)可得

$$\begin{aligned}\langle T(\alpha)f,g\rangle&=|\alpha|^{k-1}\sum_{j=1}^{d(\alpha)}\langle f\circ[\alpha\eta_j]_{2k},g\rangle\\&=d(\alpha)|\alpha|^{k-1}\langle f\circ[\alpha]_{2k},g\rangle\\&=d(\alpha)|\alpha|^{k-1}\langle f,g\circ[\tilde{\alpha}]_{2k}\rangle,\end{aligned}\tag{26.2}$$

其中 $\tilde{\alpha}$由式(21.17)给出. 由定理 34.6(i)($N=r=1$)知 $\Gamma\alpha\Gamma=\Gamma\tilde{\alpha}\Gamma$. 因此，

$$d(\alpha)=d(\tilde{\alpha}),\quad T(\alpha)=T(\tilde{\alpha}).\tag{26.3}$$

另一方面，同理可得

$$\langle f,T(\tilde{\alpha})g\rangle=d(\tilde{\alpha})|\tilde{\alpha}|^{k-1}\langle f,g\circ[\tilde{\alpha}]_{2k}\rangle.$$

由以上三式即得所要的结论.

由定理 26.1 及式(25.15)立即推出

定理 26.2 设 $f,g\in M_{2k}(\Gamma)$，且至少有一个是尖形式. 那么有

$$\langle T(n)f,g\rangle=\langle f,T(n)g\rangle,\quad n\geqslant 1,\tag{26.4}$$

即 Hecke 算子 $T(n)$是 Petersson 内积的自伴算子.

显见，定理 26.1 和定理 26.2 是等价的(为什么).

定理 26.3　Hecke 算子 $T(n)$，及 $T(\alpha)(\alpha\in \mathrm{GL}_2^+(\mathbf{Z}))$ 的特征值一定是实数.

证　我们对 $T(n)$ 来证，另一结论留给读者. 设 $T(n)f=\lambda f$. 若 $f\in S_{2k}(\Gamma)$，则在式(26.4)中取 $g=f$，就推出 λ 是实数；若 $f\in M_{2k}(\Gamma)$ 不是尖形式，那么，必有 $a\neq 0$，使 $f_1=f-aG_{2k}^*\in S_{2k}(\Gamma)$. 由此及定理 25.10 推出

$$T(n)f = T(n)f_1 + a\sigma_{2k-1}(n)G_{2k}^* = \lambda f_1 + a\lambda G_{2k}^*.$$

由此推出 $a(\lambda-\sigma_{2k-1}(n))G_{2k}^*\in S_{2k}(\Gamma)$，所以，$\lambda=\sigma_{2k-1}(n)$ 是实数. 证毕.

下面用 Poincaré 级数来直接证明定理 26.2.

定理 26.4　设 $\nu\geqslant 0,k\geqslant 2$，并记 $P_\nu(z)=P_\nu(\Gamma,2k)(z)$. 我们有

$$T(n)P_\nu = \sum_{d\mid(n,\nu)}(n/d)^{2k-1}P_{\nu n/d^2}. \tag{26.5}$$

特别的有

$$T(n)P_0 = \sigma_{2k-1}(n)P_0. \tag{26.6}$$

证　由式(25.25)及例 22.1 得

$$T(n)P_\nu = n^{k-1}\sum_{\alpha\in\Gamma\backslash M(n)}P_\nu\circ[\alpha]_{2k} = n^{k-1}\sum_{\alpha\in\Gamma\backslash M(n)}\ \sum_{\sigma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\mathrm{e}_1^\nu\circ[\sigma\alpha]_{2k}. \tag{26.7}$$

容易看出，$\{\sigma\alpha\}$ 给出了 $M(n)$ 关于 Γ_∞ 的右陪集分解 $\Gamma_\infty\backslash M(n)$ 的代表系. 现在取定 $\{\alpha\}$ 为(见定理 34.9(i)($N=r=1$))

$$M(n) = \bigcup_{\substack{d\mid n\\ b \bmod d}}\Gamma\begin{bmatrix} n/d & b\\ 0 & d\end{bmatrix}. \tag{26.8}$$

我们要证对所取的 $\{\alpha\}$ 及 $\{\sigma\}$，$\{\alpha\sigma\}$ 也是 $\Gamma_\infty\backslash M(n)$ 的右陪集分解代表系. (i) 首先，容易验证(留给读者)：若

$$\alpha_1\sigma_1 = \begin{bmatrix} n/d_1 & b_1\\ 0 & d_1\end{bmatrix}\sigma_1$$

$$\in \Gamma_\infty\alpha_2\sigma_2 = \Gamma_\infty\begin{bmatrix} n/d_2 & b_2\\ 0 & d_2\end{bmatrix}\sigma_2,\quad \sigma_1,\sigma_2\in\{\Gamma_\infty\backslash\Gamma\},$$

那么，必有

$$\alpha_1=\alpha_2,\quad \sigma_1=\sigma_2.$$

这就证明了右陪集 $\Gamma_\infty\alpha\sigma$ 两两不相交. 其次,对任一 $\beta\in M(n)$,必有 $\gamma\in\Gamma,d|n$ 及所取的某个 α 使得(为什么):

$$\beta\gamma=\begin{bmatrix}n/d & h\\ 0 & d\end{bmatrix}\in\Gamma_\infty\alpha.$$

由此推出

$$M(n)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma\backslash M(n)}\Gamma_\infty\alpha\Gamma=\bigcup_{\alpha\in\Gamma\backslash M(n)}\ \bigcup_{\sigma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\Gamma_\infty\alpha\Gamma_\infty\sigma.$$

对所取形式的 α,容易验证 $\Gamma_\infty\alpha\Gamma_\infty=\Gamma_\infty\alpha$,因此有

$$M(n)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma\backslash M(n)}\ \bigcup_{\sigma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\Gamma_\infty\alpha\sigma.$$

由(i)及(ii)就推出所要结论. 由此及式(26.7)推出(利用式(15.4))

$$\begin{aligned}T(n)P_\nu(z)&=n^{k-1}\sum_\alpha\sum_\sigma \mathrm{e}_1^\nu\circ[\alpha\sigma]_{2k}(z)\\&=n^{k-1}\sum_\alpha\sum_\sigma n^k j(z;\alpha\sigma)^{-2k}\mathrm{e}(\nu\alpha\sigma(z))\\&=n^{2k-1}\sum_\alpha\sum_\sigma j(z;\sigma)^{-2k}j(\sigma(z);\alpha)^{-2k}\mathrm{e}(\nu\alpha\sigma(z)).\end{aligned}$$

对所取形式的 α,由此得到

$$\begin{aligned}T(n)P_\nu(z)&=n^{2k-1}\sum_\sigma j(z;\sigma)^{-2k}\\&\quad\cdot\sum_{\substack{d|n\\ b\bmod d}}d^{-2k}\mathrm{e}(\nu n\sigma(z)/d^2)\sum_{b\bmod d}\mathrm{e}(\nu b/d)\\&=n^{2k-1}\sum_{d|(n,\nu)}d^{-2k+1}\sum_\sigma j(z;\sigma)^{-2k}\mathrm{e}((\nu n/d^2)\sigma(z)).\end{aligned}$$

这就证明了式(26.5). 当 $\nu=0$ 时,由式(26.5)即得式(26.6).

显见,式(26.6)给出了定理 25.10 的又一证明.

定理 26.5　设 $P_\nu(z)$有 Fourier 展式

$$P_\nu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_\nu(m)\mathrm{e}^{2\pi imz},\quad \nu\geqslant 0.\tag{26.9}$$

再设

$$A(\mu,2k)=(2k-2)!(4\pi\mu)^{1-2k},\quad \mu\geqslant 1,\tag{26.10}$$

$$c_\nu(m,n)=\sum_{d|(n,\nu)}(n/d)^{2k-1}c_{\nu n/d^2}(m),\quad m\geqslant 0.\tag{26.11}$$

那么有

$$T(n)P_\nu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_\nu(m,n)e^{2\pi imz},\quad \nu\geqslant 0; \tag{26.12}$$

$$\langle T(n)P_\nu,P_\mu\rangle = A(\mu,2k)c_\nu(\mu,n),\quad \mu\geqslant 1,\quad \nu\geqslant 1; \tag{26.13}$$

以及

$$c_\nu(m,n)=c_\nu(n,m). \tag{26.14}$$

证　由式(26.5)和(26.9)即得式(26.12). 由式(26.12)及定理 25.8 可得到

$$c_\nu(m,n)=\sum_{a\mid(m,n)}a^{2k-1}c_\nu(mn/a^2). \tag{26.15}$$

由此就推出式(26.14). 最后,从定理 22.4(取 $\Gamma'=\Gamma$)和式(26.12)可得式(26.13). 证毕.

从关系式(26.11),(26.12)及(26.15)可看出 $P_\nu(z)$ 的 Fourier 展式的系数应有很好的性质.

定理 26.6　我们有

$$\langle T(n)P_\nu,P_\mu\rangle = \langle P_\nu,T(n)P_\mu\rangle,\quad \mu+\nu\geqslant 1. \tag{26.16}$$

证　当 μ,ν 有一为 0 时结论显然成立(为什么). 所以可设 $\mu\geqslant 1,\nu\geqslant 1$. 由式(26.13),(26.10),(26.11)及(26.14)得到

$$\begin{aligned}\langle T(n)P_\nu,P_\mu\rangle &= A(\mu,2k)c_\nu(\mu,n)\\ &= A(\nu,2k)(\nu/\mu)^{2k-1}(n/\nu)^{2k-1}c_n(\mu,\nu)\\ &= A(\nu,2k)(n/\mu)^{2k-1}c_n(\mu,\nu) = A(\nu,2k)(n/\mu)^{2k-1}c_n(\nu,\mu)\\ &= A(\nu,2k)c_\mu(\nu,n) = \langle T(n)P_\mu,P_\nu\rangle.\end{aligned}$$

由定理 22.1 知 $c_\nu(m)$ 及 $c_\nu(m,n)$ 均为实数,因此,式(26.16)成立.

下面来讨论尖形式空间的基.

定义 26.1　设 Γ' 是同余子群. $S_k(\Gamma')$ 的一组基 $g_1,\cdots,g_r$ 称为是**标准正交基**,如果满足

$$\langle g_i,g_j\rangle=0,\quad i\neq j;\quad \langle g_i,g_i\rangle=1,\quad 1\leqslant i\leqslant r.$$

$S_k(\Gamma')$ 是有限维内积空间,由熟知的线性空间理论知,$S_k(\Gamma')$ 一定有标准正交基. 本节的目的是要证明

定理 26.7　$S_{2k}(\Gamma)$ 一定有一组标准正交基,其中每个元素都是 Hecke 算子的联立特征尖形式.

为证明定理 26.7 先要证明三个引理. 实际上这都是线性空间理论中熟知的结果.

引理 26.8　设 n 是给定的正整数. 那么, $S_{2k}(\Gamma)$ 一定有一组标准正交基, 其中每个元素都是 Hecke 算子 $T(n)$ 的特征尖形式.

证　设 $g_1,\cdots,g_r$ 是 $S_{2k}(\Gamma)$ 的一组标准正交基,

$$T(n)g_i=\sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}g_j,\quad 1\leqslant i\leqslant r.$$

由此及定理 26.2 推出

$$\lambda_{ij}=\langle T(n)g_i,g_j\rangle=\langle g_i,T(n)g_j\rangle=\bar{\lambda}_{ji}.$$

因此, r 阶矩阵 $((\lambda_{ij}))$ 是 Hermite 矩阵. 由矩阵理论知(见许以超: 代数学引论, 第 430 页, 定理 4), 存在 r 阶酉矩阵 U, 即满足 $U\bar{U}'=I$ (U 和它的转置共轭矩阵的乘积是单位矩阵), 使得

$$U((\lambda_{ij}))\bar{U}'=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r\end{bmatrix},\quad 0\neq\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_r. \tag{26.17}$$

容易证明(留给读者): 由

$$\begin{bmatrix}\tilde{g}_1\\ \vdots\\ \tilde{g}_r\end{bmatrix}=U\begin{bmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_r\end{bmatrix}$$

给出的 $\tilde{g}_1,\cdots,\tilde{g}_r$ 也是一组标准正交基, 且满足

$$T(n)\begin{bmatrix}\tilde{g}_1\\ \vdots\\ \tilde{g}_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{g}_1\\ \vdots\\ \tilde{g}_r\end{bmatrix}. \tag{26.18}$$

这就证明了所要的结论.

附注　容易证明: 式(26.17)中给出的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ (可以相等)是在 $S_{2k}(\Gamma)$ 上 $T(n)$ 的全部特征值. 若 $f\in S_{2k}(\Gamma)$, $T(n)f=\lambda f$. 设 $f=a_1\tilde{g}_1+\cdots+a_r\tilde{g}_r$. 我们有

$$\lambda f=a_1\lambda_1\tilde{g}_1+\cdots+a_r\lambda_r\tilde{g}_r,\quad (\lambda-\lambda_1)a_1\tilde{g}_1+\cdots+(\lambda-\lambda_r)a_rg_r=0.$$

由于 $\tilde{g}_1,\cdots,\tilde{g}_r$ 是一组基, 所以 λ 必和某一 λ_j 相等.

引理 26.9　设 n 是给定的正整数, λ 是 $T(n)$ 的一个特征值. 再

设

$$S_{2k}(\Gamma;n,\lambda) = \{f \in S_{2k}(\Gamma):\ T(n)f = \lambda f\}. \qquad (26.19)$$

那么，$S_{2k}(\Gamma;n,\lambda)$是 $S_{2k}(\Gamma)$的线性子空间，且对任意正整数 m 有

$$T(m)f \in S_{2k}(\Gamma;n,\lambda), \quad f \in S_{2k}(\Gamma;n,\lambda). \qquad (26.20)$$

特别的，当 $S_{2k}(\Gamma;n,\lambda)$的维数等于 1 时，它的每个元素都是联立特征尖形式.

证　由式(25.28)知

$$T(n)(T(m)f) = T(m)(T(n)f) = \lambda(T(m)f),$$
$$f \in S_{2k}(\Gamma;n,\lambda).$$

这就证明了式(26.20). 其余的结论的证明留给读者.

引理 26.10　设 n 是给定的正整数，$\lambda^{(1)}$，$\lambda^{(2)}$是 $T(n)$的两个不相等的特征值. 再设

$$T(n)f_j = \lambda^{(j)}f_j, \quad f_j \in S_{2k}(\Gamma), \quad j = 1,2.$$

那么 $\langle f_1,f_2\rangle=0$.

证　由定理 26.2 和定理 26.3 得到

$$\lambda^{(1)}\langle f_1,f_2\rangle = \langle T(n)f_1,f_2\rangle = \langle f_1,T(n)f_2\rangle = \lambda^{(2)}\langle f_1,f_2\rangle.$$

所以 $\langle f_1,f_2\rangle=0$.

定理 26.7 的证明　对给定的整数 $n>1$，设 $T(n)$的全部两两不相等的特征值是 $\lambda^{(1)},\cdots,\lambda^{(L)}$. 由引理 26.8(及其后的附注)，26.9 和 26.10 知，$S_{2k}(\Gamma)$可分解为两两正交的子空间的直和：

$$S_{2k}(\Gamma) = S_{2k}(\Gamma;n,\lambda^{(1)}) \oplus \cdots \oplus S_{2k}(\Gamma;n,\lambda^{(L)}). \qquad (26.21)$$

由引理 26.9 知，全体 Hecke 算子 $T(m)(m\geqslant1)$可看做每个子空间 $S_{2k}(\Gamma;n,\lambda^{(l)})$上的算子，所以，可在每个这样的子空间上来讨论. 例如，先取 $S_{2k}(\Gamma;n,\lambda^{(1)})$，若其中每个尖形式都是联立特征尖形式，则讨论下一个. 不然，就有 $n'\neq n$，使在 $S_{2k}(\Gamma;n,\lambda^{(1)})$中有尖形式不是 $T(n')$的特征尖形式. 这样，对 $T(n')$和 $S_{2k}(\Gamma;n,\lambda^{(1)})$可进行完全相同于对 $T(n)$和 $S_{2k}(\Gamma)$所作的讨论，把 $S_{2k}(\Gamma;n,\lambda^{(1)})$再分为两两正交的子空间的直和，其中每个子空间的元素都是 $T(n')$的特征尖形式. 反复这样的讨论，所得的子空间的维数逐步减小，注意一维子空间的元素一定都是联立特征尖形式，所以，最后一定可把 $S_{2k}(\Gamma)$分解为两两正交的子空间的直和，且其中每个子空间的元素都是联立特征

尖形式. 显然，每个子空间都可取到一组标准正交基. 这就证明了所要的结论.

问　题

1. 证明式(25.12)和(25.17).

2. 本题给出了式(25.47)的直接证明.

(i) 设 p 是素数，整数 k 满足 $1\leqslant k\leqslant p-1$. 证明：存在整数 h 满足

$$z^{12}\Delta\left(\frac{z+h}{p}\right)=\Delta\left(\frac{kz-1}{pz}\right),$$

且当 k 遍历 $1,2,\cdots,p-1$ 时，h 亦遍历模 p 的既约剩余系；

(ii) 设 p 是素数，及

$$F_p(z)=p^{12}\Delta(pz)+\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\Delta\left(\frac{z+k}{p}\right),$$

证明：$F_p(z+1)=F_p(z)$，及 $F_p(-1/z)=z^{12}F_p(z)$；

(iii) 证明：$F_p(z)=\tau(p)\Delta(z)$，$\tau(l)$是 Ramanujan 函数；

(iv) 证明：$\tau(p^{n+1})=\tau(p)\tau(p^n)-p^{11}\tau(p^{n-1})$, $n\geqslant 1$；

(v) 证明：$\tau(p^n l)=\tau(p)\tau(p^{n-1}l)-p^{11}\tau(p^{n-2}l)$,

$$n\geqslant 2,\quad (l,p)=1;$$

(vi) 设整数 $n\geqslant 0$，$(l,p)=1$，p 是素数. 再设

$$g(n)=\tau(p^n l)-\tau(p^n)\tau(l),$$

证明：当 $n\geqslant 2$ 时，$g(n+1)$是 $g(n)$和 $g(n-1)$的线性组合，进而推出 $g(n)$恒为零；

(vii) 证明式(25.47).

第九章　同余子群的模形式空间上的 Hecke 算子

本章是继续上一章讨论同余子群的模形式空间上的 Hecke 算子，所用的方法实质上是一样的，但情况要复杂得多，所以我们从更一般的 Hecke 代数观点来讨论，它本身是模形式理论的一部分．§ 27 和 § 28 的内容与 § 25 和 § 26 是平行的，但所得的结论要弱．

§ 27　同余子群的 Hecke 算子与 Hecke 代数

设半群 $\Sigma\subseteq GL_2^+(\mathbf{Z})$，同余子群 $\Gamma',\Gamma''\subseteq\Sigma$. 这样，对每个 $\alpha\in\Sigma$，就确定一个双陪集(见式(34.22))$\Gamma'\alpha\Gamma''\subseteq\Sigma$. 设右陪集分解为(见式(34.21))

$$\Gamma'\alpha\Gamma''=\bigcup_{j=1}^{d}\Gamma'\alpha\eta_j. \tag{27.1}$$

再设 k 是整数. 这样，类似于(25.2)，对 $f\in V_k(\Gamma')$相应地可定义如下的运算：

$$f\mapsto|\alpha|^{k/2-1}\sum_{j=1}^{d}f\circ[\alpha\eta_j]_k. \tag{27.2}$$

显见，这样定义的运算与(27.1)中的右陪集分解代表系$\{\alpha\eta_j\}$的具体取法无关(为什么). 因此，式(27.2)定义的运算由双陪集 $\Gamma'\alpha\Gamma''$完全确定，我们可以用以下两种符号来表示这同一运算：

$$T(\Gamma'\alpha\Gamma'')=T(\Gamma'\alpha\Gamma'',k),\quad [\Gamma'\alpha\Gamma'']_k=|\alpha|^{k/2-1}\sum_{j=1}^{d}[\alpha\eta_j]_k, \tag{27.3}$$

前一种符号是左作用于 f，后一种符号是右作用于 f，即

$$\begin{aligned}T(\Gamma'\alpha\Gamma'')f=T(\Gamma'\alpha\Gamma'',k)f&=f\circ[\Gamma'\alpha\Gamma'']_k\\&=f\circ\left(|\alpha|^{k/2-1}\sum_{j=1}^{d}[\alpha\eta_j]_k\right)\end{aligned}$$

$$= |\alpha|^{k/2-1}\sum_{j=1}^{d} f \circ [\alpha\eta_j]_k. \qquad (27.4)$$

这两类符号各有优点，以后将交替使用. 容易证明(留给读者)：当 $f \in V_k(\Gamma')$ 时，

$$T(\Gamma'\alpha\Gamma'')f \circ [\eta]_k = T(\Gamma'\alpha\Gamma'')f, \quad \eta \in \Gamma'', \qquad (27.5)$$

即

$$T(\Gamma'\alpha\Gamma'')f \in V_k(\Gamma''), \quad f \in V_k(\Gamma'). \qquad (27.5')$$

因此，类似于完全模群的情形，我们引进

定义 27.1 设半群 $\Sigma \subseteq GL_2^+(\boldsymbol{Z})$，同余子群 $\Gamma', \Gamma'' \subseteq \Sigma$，及 $\alpha \in \Sigma$. 由双陪集 $\Gamma'\alpha\Gamma''$ 确定的，式(27.4)所给出的运算称为是**同余子群 Γ' 的模函数空间 $V_k(\Gamma')$ 到同余子群 Γ'' 的模函数空间 $V_k(\Gamma'')$ 的 Hecke 算子**；当 $\Gamma' = \Gamma''$ 时，称为**同余子群 Γ' 的模函数空间 $V_k(\Gamma')$ 上的 Hecke 算子**，简称为**同余子群 Γ' 的 Hecke 算子**. 一般的，设 $c_1, \cdots, c_J$ 是复数，$\alpha_1, \cdots, \alpha_J \in \Sigma$. 我们可定义算子 $T = \sum_{j=1}^{J} c_j T(\Gamma'\alpha_j\Gamma'')$：

$$\left(\sum_{j=1}^{J} c_j T(\Gamma'\alpha_j\Gamma'')\right) f = \sum_{j=1}^{J} c_j (T(\Gamma'\alpha_j\Gamma'')f), \quad f \in V_k(\Gamma'), \qquad (27.6)$$

它也称为是**同余子群 Γ' 的模函数空间 $V_k(\Gamma')$ 到同余子群 Γ'' 的模函数空间 $V_k(\Gamma'')$ 的 Hecke 算子**；当 $\Gamma' = \Gamma''$ 时，称为**同余子群 Γ' 的模函数空间 $V_k(\Gamma')$ 上的 Hecke 算子**，简称为**同余子群 Γ' 的 Hecke 算子**.

与完全模群的情形一样，可以讨论算子的加法运算(见式(25.6)～(25.8)). 所以，全体这样的 Hecke 算子(27.6)组成一个加法群. 容易看出，包含 $T(\Gamma'\alpha\Gamma'')$，$\alpha \in \Sigma$ 的最小加法群是：

$$H(\Sigma, \Gamma', \Gamma''; k) = \left\{ \sum_{j=1}^{J} c_j T(\Gamma'\alpha_j\Gamma''; k) : c_j \in \boldsymbol{Z}, \right.$$

$$\left. \alpha_j \in \Sigma, j = 1, \cdots, J, J \in \boldsymbol{N} \right\}. \qquad (27.7)$$

通常称这最小加法群为 **Hecke 算子群**. 特别的，当 $\Gamma' = \Gamma''$ 时，我们记

$$H(\Sigma, \Gamma'; k) = H(\Sigma, \Gamma', \Gamma''; k). \qquad (27.8)$$

由以上讨论就证明了

定理 27.1 Hecke 算子 $T \in H(\Sigma, \Gamma', \Gamma''; k)$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上的线性空间

$V_k(\Gamma')$ $(A_k(\Gamma'), M_k(\Gamma')$，或 $S_k(\Gamma'))$ 到线性空间 $V_k(\Gamma'')$ $(A_k(\Gamma''), M_k(\Gamma'')$，或 $S_k(\Gamma''))$ 的线性算子. 特别的，当 $\Gamma'=\Gamma''$ 时，Hecke 算子 $T\in H(\Sigma,\Gamma';k)$ 是 $V_k(\Gamma')$ $(A_k(\Gamma'), M_k(\Gamma')$，或 $S_k(\Gamma'))$ 到自身的线性算子.

当 $\Gamma'=\Gamma''$ 时，$H(\Sigma,\Gamma';k)$ 中的算子 T_1, T_2 可以做乘法运算：

$$(T_2T_1)f = T_2(T_1f). \tag{27.9}$$

显见，这样定义的乘法运算满足结合律，且乘法运算和加法运算满足分配律（为什么）. 与完全模群的情形一样，我们可以讨论这样的问题：$H(\Sigma,\Gamma';k)$ 中的算子的乘法运算是不是封闭的，即 T_2T_1 是否也属于 $H(\Sigma,\Gamma';k)$. 回答是肯定的，但证明并不简单. 这就是下面的

定理 27.2　Hecke 算子集合 $H(\Sigma,\Gamma';k)$ 在所定义的加法运算与乘法运算下，组成一个环，它称为**同余子群 Γ' 的 Hecke 算子环.**

证　只要证明 $H(\Sigma,\Gamma';k)$ 对乘法运算是封闭的. 设有双陪集分解

$$\Gamma'\alpha_1\Gamma' = \bigcup_{l=1}^{d_1}\Gamma'\alpha_1\eta_{1l}, \quad \Gamma'\alpha_2\Gamma' = \bigcup_{m=1}^{d_2}\Gamma'\alpha_2\eta_{2m}. \tag{27.10}$$

我们记 $T(\alpha)=T(\Gamma'\alpha\Gamma')=T(\Gamma'\alpha\Gamma',k)$. 由式(27.4)知

$$T(\alpha_2)T(\alpha_1) = |\alpha_1\alpha_2|^{k/2-1}\sum_{m=1}^{d_2}\sum_{l=1}^{d_1}[\alpha_1\eta_{1l}\alpha_2\eta_{2m}], \tag{27.11}$$

这里，为简单起见，略去算子 $[\sigma]_k$ 的下标 k 不写. 事实上，以下推导全和 k 无关. 对以下 d_1d_2 个元素

$$\alpha_1\eta_{1l}\alpha_2\eta_{2m}, \quad 1\leqslant l\leqslant d_1, \quad 1\leqslant m\leqslant d_2, \tag{27.12}$$

首先来考虑它们属于怎样的右陪集

$$\Gamma'\xi, \quad \xi\in \mathrm{GL}_2^+(\mathbf{Z}). \tag{27.13}$$

对给定的 $\xi\in \mathrm{GL}_2^+(\mathbf{Z})$，以 $n(\xi)$ 表示所有满足以下条件的数对 $\{l,m\}$ 的个数：

$$\alpha_1\eta_{1l}\alpha_2\eta_{2m} \in \Gamma'\xi. \tag{27.14}$$

对取定的 m，若有 $l=l_1, l_2$ 使上式成立，则必有 $l_1=l_2$（为什么）. 这就证明了对给定的 ξ 及取定的 m，至多有一个 l 使式(27.14)成立. 因此 $n(\xi)$ 就等于满足以下条件的 m 的个数：$1\leqslant m\leqslant d_2$，存在 l $(1\leqslant l\leqslant d_1)$ 使得式(27.14)成立，即存在 l $(1\leqslant l\leqslant d_1)$ 使得

$$\alpha_2\eta_{2m}\in(\alpha_1\eta_{1l})^{-1}\Gamma'\xi,$$

亦即

$$\Gamma'\alpha_2\eta_{2m}\subset\Gamma'\alpha_1^{-1}\Gamma'\xi.$$

这就证明了

$$n(\xi)=\Gamma'\alpha_1^{-1}\Gamma'\xi\text{ 中包含的 }\Gamma'\alpha_2\Gamma'\text{ 的右陪集分解式 (27.10) 中的右陪集的个数.}\tag{27.15}$$

由此推出,对任意的 $\gamma\in\Gamma'$,有

$$n(\xi\gamma)=n(\xi),\quad \xi\in\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{Z}).\tag{27.16}$$

设 $d=d(\xi)$,右陪集分解

$$\Gamma'\xi\Gamma'=\bigcup_{j=1}^{d}\Gamma'\xi\gamma_j.\tag{27.17}$$

由以上讨论知,在这两两不相交的每一个右陪集 $\Gamma'\xi\gamma_j$ 中都恰好包含了式(27.12)中的 $n(\xi)$ 个元素(即个数与 γ_j 无关),这就推出

$$d(\xi)n(\xi)=\text{所有满足以下条件的数对}\{l,m\}\text{的个数:}\quad 1\leqslant l\leqslant d_1,\quad 1\leqslant m\leqslant d_2,\quad \Gamma'\alpha_1\eta_{1l}\alpha_2\eta_{2m}\Gamma'=\Gamma'\xi\Gamma'.\tag{27.18}$$

显见,仅有有限个 ξ 使 $n(\xi)$ 不为零,因此,我们证明了:一定存在 $\xi_r\in\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{Z})$,$1\leqslant r\leqslant R$,使得

$$\begin{aligned}T(\alpha_2)T(\alpha_1)&=\sum_{r=1}^{R}n(\xi_r)\Big\{|\xi_r|^{k/2-1}\sum_{\sigma_r\in\Gamma'\backslash\Gamma'\xi_r\Gamma'}[\sigma_r]\Big\}\\&=\sum_{r=1}^{R}n(\xi_r)T(\xi_r)\in H(\Sigma,\Gamma';k),\end{aligned}\tag{27.19}$$

且有

$$\sum_{r=1}^{R}n(\xi_r)d(\xi_r)=d_1d_2.\tag{27.20}$$

这就证明了定理.

Hecke 算子是由双陪集的右陪集分解引入的,而这种分解和 k 是无关的. 定理 27.2 的证明也表明了这一点,即 Hecke 算子的加法运算和乘法运算的性质都是和 k 无关的. 实质上,Hecke 算子的加法运算与乘法运算正是双陪集集合的某种相应运算的反映. 现在,我们就来相应地引入双陪集的某种"加法运算"与"乘法运算",它们不同

于由集合的“并”及“自然乘积”所给出的集合运算，以使 Hecke 算子的运算与双陪集的运算之间建立一一对应的关系．下面就来讨论这一问题．

定义 27.2　设半群 $\Sigma\subseteq GL_2^+(\boldsymbol{Z})$，同余子群 $\Gamma',\Gamma''\subseteq\Sigma$．考虑由双陪集的形式和组成的集合：

$$H(\Sigma,\Gamma',\Gamma'')=\left\{\sum_{j=1}^{J}c_j(\Gamma'\alpha_j\Gamma'')：c_j\in\boldsymbol{Z},\right.$$

$$\left.\alpha_j\in\Sigma,j=1,\cdots,J,J\in\boldsymbol{N}\right\},\qquad(27.21)$$

其中系数为 0 时表示这项不存在．当 $\Gamma'=\Gamma''$ 时，记

$$H(\Sigma,\Gamma')=H(\Sigma,\Gamma',\Gamma'').\qquad(27.22)$$

在 $H(\Sigma,\Gamma',\Gamma'';k)$ 与 $H(\Sigma,\Gamma',\Gamma'')$ 之间建立如下的一一对应：

$$F：\sum_{j=1}^{J}c_jT(\Gamma'\alpha_j\Gamma'';k)\longleftrightarrow\sum_{j=1}^{J}c_j(\Gamma'\alpha_j\Gamma''),\qquad(27.23)$$

即

$$F\left(\sum_{j=1}^{J}c_jT(\Gamma'\alpha_j\Gamma'';k)\right)=\sum_{j=1}^{J}c_j(\Gamma'\alpha_j\Gamma''),$$

$$F^{-1}\left(\sum_{j=1}^{J}c_j(\Gamma'\alpha_j\Gamma'')\right)=\sum_{j=1}^{J}c_jT(\Gamma'\alpha_j\Gamma'';k).$$

设 $T_1,T_2\in H(\Sigma,\Gamma',\Gamma'')$，定义 T_1,T_2 的“加法运算”$\oplus$为：

$$T_1\oplus T_2=F(F^{-1}(T_1)+F^{-1}(T_2));\qquad(27.24)$$

当 $\Gamma'=\Gamma''$，$T_1,T_2\in H(\Sigma,\Gamma')$时，定义 T_1,T_2 的“乘法运算”$\otimes$为：

$$T_1\otimes T_2=F(F^{-1}(T_2)F^{-1}(T_1)).\qquad(27.25)$$

这里要注意的是，Hecke 算子的符号用的是式(27.3)中的第一种符号，所以在对应 F 下，双陪集的形式和的“乘法运算”$\otimes$的次序与 Hecke 算子的乘法次序相反(见式(27.25))．如果 Hecke 算子的符号用的是式(27.3)中的第二种符号，则两者就一致了．

由定理 27.2 立即可推出(具体证明留给读者)

定理 27.3　在由式(27.24)和(27.25)定义的“加法运算”$\oplus$和“乘法运算”$\otimes$下，由双陪集的形式和组成的集合 $H(\Sigma,\Gamma')$是一个环．环 $H(\Sigma,\Gamma')$和环 $H(\Sigma,\Gamma';k)$是同构的，式(27.23)给出了一个同构对应．通常分别称它们是 **Hecke 代数**和 **Hecke 算子代数**．

当然,我们也可以先讨论由双陪集的形式和组成的集合 $H(\Sigma,\Gamma')$,相应地在其中引入"加法运算"$\oplus$和"乘法运算"$\otimes$,直接证明它是一个环. 然后,反过来推出 Hecke 算子集合 $H(\Sigma,\Gamma';k)$是一个环,且两者是同构的. 这些讨论都留给读者,一般模形式书中都是这样处理的,但我们的途径较为自然.

应该指出,双陪集作为集合的'并'运算及集合的'自然乘法'运算与这里的"加法运算"$\oplus$和"乘法运算"$\otimes$的差别是在于后者是按重数计算的,这是与算子的运算相对应的. 例如,作为"乘法运算"$\otimes$,我们有

$$(\Gamma'\alpha_1\Gamma')\otimes(\Gamma'\alpha_2\Gamma')=\sum_{r=1}^{R}n(\xi_r)(\Gamma'\xi_r\Gamma'). \tag{27.26}$$

但作为矩阵的集合的'自然乘法',我们有

$$(\Gamma'\alpha_1\Gamma')(\Gamma'\alpha_2\Gamma')=(\Gamma'\alpha_1\Gamma'\alpha_2\Gamma')=\sum_{r=1}^{R}(\Gamma'\xi_r\Gamma'). \tag{27.27}$$

这样,如果知道了式(27.27),为了求式(27.26)就是要去确定各个 $n(\xi_r)$.

一般说来,环 $H(\Sigma,\Gamma')$和环 $H(\Sigma,\Gamma';k)$不一定是交换的,但我们有下面的

定理 27.4　设半群 $\Sigma\subseteq GL_2^+(\mathbf{Z})$,同余子群 $\Gamma'\subseteq\Sigma$. 若存在 $GL_2^+(\mathbf{Z})$ 的反自同构 $\alpha\mapsto\alpha^*$: $(\alpha\beta)^*=\beta^*\alpha^*$,使得

$$(\Gamma'\alpha\Gamma')^*=\Gamma'\alpha\Gamma',\quad \alpha\in\Sigma. \tag{27.28}$$

那么,$H(\Sigma,\Gamma';k)$和 $H(\Sigma,\Gamma')$都是交换环.

证　显然只要证明其中一个是交换环. 我们来考虑 $H(\Sigma,\Gamma')$,证明"乘法运算"$\otimes$是交换的. 首先来证明作为集合的'自然乘法',我们有

$$(\Gamma'\alpha_1\Gamma')(\Gamma'\alpha_2\Gamma')=(\Gamma'\alpha_2\Gamma')(\Gamma'\alpha_1\Gamma'),\quad \alpha_1,\alpha_2\in\Sigma. \tag{27.29}$$

由式(27.27)及条件(27.28)知

$$\begin{aligned}(\Gamma'\alpha_2\Gamma')(\Gamma'\alpha_1\Gamma')&=(\Gamma'\alpha_2\Gamma')^*(\Gamma'\alpha_1\Gamma')^*=((\Gamma'\alpha_1\Gamma')(\Gamma'\alpha_2\Gamma'))^*\\&=\left(\sum_{r=1}^{R}(\Gamma'\xi_r\Gamma')\right)^*=\sum_{r=1}^{R}(\Gamma'\xi_r\Gamma').\end{aligned}$$

由此及式(27.27)就推出式(27.29). 因此有

$$(\Gamma'\alpha_2\Gamma')\otimes(\Gamma'\alpha_1\Gamma')=\sum_{r=1}^{R}n'(\xi_r)(\Gamma'\xi_r\Gamma').\qquad(27.30)$$

这样,由此及式(27.26)知"乘法运算"$\otimes$的交换性归结为证明:

$$n'(\xi_r)=n(\xi_r),\quad 1\leqslant r\leqslant R.\qquad(27.31)$$

由定理 34.2 知,双陪集的左、右陪集分解可取相同的代表系,即可取

$$\Gamma'\alpha_1\Gamma'=\bigcup_{l=1}^{d_1}\Gamma'\alpha_{1l}=\bigcup_{l=1}^{d_1}\alpha_{1l}\Gamma',$$

$$\Gamma'\alpha_2\Gamma'=\bigcup_{m=1}^{d_2}\Gamma'\alpha_{2m}=\bigcup_{m=1}^{d_2}\alpha_{2m}\Gamma'.$$

利用条件(27.28)可得

$$\Gamma'\alpha_1\Gamma'=\bigcup_{l=1}^{d_1}\Gamma'\alpha_{1l}^*=\bigcup_{l=1}^{d_1}\alpha_{1l}^*\Gamma',$$

$$\Gamma'\alpha_2\Gamma'=\bigcup_{m=1}^{d_2}\Gamma'\alpha_{2m}^*=\bigcup_{m=1}^{d_2}\alpha_{2m}^*\Gamma'.$$

由以上各式及式(27.18)知,

$d(\xi_r)n(\xi_r)$=所有满足以下条件的数对$\{l,m\}$的个数:

$$1\leqslant l\leqslant d_1,\quad 1\leqslant m\leqslant d_2,\quad \Gamma'\alpha_{1l}\alpha_{2m}\Gamma'=\Gamma'\xi_r\Gamma',$$

$d(\xi_r)n'(\xi_r)$=所有满足以下条件的数对$\{l,m\}$的个数:

$$1\leqslant l\leqslant d_1,\quad 1\leqslant m\leqslant d_2,\quad \Gamma'\alpha_{2m}^*\alpha_{1l}^*\Gamma'=\Gamma'\xi_r\Gamma'.$$

由此及条件(27.28)就推出式(27.31),证毕.

下面我们来讨论几个重要的特殊情形,即选取(见式(34.6)和(34.14))

$$\Sigma=M(N,r),\quad \Gamma'=M(1;N,r)=\Gamma_0(N,r);\qquad(27.32)$$

$$\Sigma=M_1(N,r),\quad \Gamma'=M_1(1;N,r)=\Gamma_1(N,r).\qquad(27.33)$$

我们记

$$T(\alpha,\Gamma_0(N,r);2k)=T(\Gamma_0(N,r)\alpha\Gamma_0(N,r);2k),\quad \alpha\in M(N,r),\qquad(27.34)$$

$$T(\alpha,\Gamma_1(N,r);k)=T(\Gamma_1(N,r)\alpha\Gamma_1(N,r);k),\quad \alpha\in M_1(N,r),\qquad(27.35)$$

$$H(\Gamma_0(N,r);2k)=H(M(N,r),\Gamma_0(N,r);2k),\qquad(27.36)$$

$$H(\Gamma_0(N,r))=H(M(N,r),\Gamma_0(N,r)),\qquad(27.37)$$

以及

$$H(\Gamma_1(N,r);k)=H(M_1(N,r),\Gamma_1(N,r);k),\quad(27.38)$$

$$H(\Gamma_1(N,r))=H(M_1(N,r),\Gamma_1(N,r)).\quad(27.39)$$

这样,由定理 27.4 及定理 34.8,34.6 立即推出(具体推导留给读者)

定理 27.5 (i) $H(\Gamma_0(N,r);2k)$,$H(\Gamma_1(N,r);k)$,$H(\Gamma_0(N,r))$和 $H(\Gamma_1(N,r))$都是交换环;

(ii) 若 $\alpha\in M(n;N,r)$,则有

$$\begin{aligned}T(\alpha,\Gamma_0(N,r);2k)&=T(l,n/l;\Gamma_0(N,r);2k)\\&=l^{2k-2}T(1,n/l^2;\Gamma_0(N,r);2k);\end{aligned}\quad(27.40)$$

(iii) 若 $\alpha\in M_1(n;N,r)$,则有

$$\begin{aligned}T(\alpha,\Gamma_1(N,r);k)f&=T(l,n/l;\Gamma_1(N,r);k)f\\&=l^{k-2}T(1,n/l^2;\Gamma_1(N,r);k)(f\circ[\nu(l)]_k);\end{aligned}\quad(27.41)$$

其中

$$l=\gcd(\alpha),\quad l^2|n,\quad(l,N)=1,\quad(27.42)$$

$\nu(l)$由式(34.38)给出,以及

$$T(a,d;\Gamma_0(N,r);2k)=T\left(\begin{bmatrix}a&0\\0&d\end{bmatrix},\Gamma_0(N,r);2k\right),\quad(a,N)=1,\quad(27.43)$$

$$T(a,d;\Gamma_1(N,r);k)=T\left(\nu(a)\begin{bmatrix}a&0\\0&d\end{bmatrix},\Gamma_1(N,r);k\right),\quad(a,N)=1.\quad(27.44)$$

进而,由定理 34.7,34.9 和 34.10,推出(具体推导留给读者)

定理 27.6 设 n 是正整数,并记右陪集分解代表系

$$B=\{\Gamma_0(N,r)\backslash M(n;N,r)\},\quad B_1=\{\Gamma_1(N,r)\backslash M_1(n;N,r)\}.$$

再设 Hecke 算子

$$T(n;\Gamma_0(N,r);2k)=n^{k-1}\sum_{\sigma\in B}[\sigma]_{2k},\quad(27.45)$$

$$T(n;\Gamma_1(N,r);k)=n^{k/2-1}\sum_{\sigma\in B_1}[\sigma]_k.\quad(27.46)$$

那么,

$$T(n;\Gamma_0(N,r);2k) \in H(\Gamma_0(N,r);2k), \tag{27.47}$$

$$T(n;\Gamma_1(N,r);k) \in H(\Gamma_1(N,r);k), \tag{27.48}$$

且有

$$\begin{aligned} T(n;\Gamma_0(N,r);2k) &= \sum_{l^2|n,(l,N)=1} T(l,n/l;\Gamma_0(N,r);2k) \\ &= n^{k-1} \sum_{\substack{a|n,(a,N)=1 \\ b(\bmod n/a)}} \left[\begin{pmatrix} a & rb \\ 0 & n/a \end{pmatrix}\right]_{2k}, \end{aligned} \tag{27.49}$$

$$\begin{aligned} T(n;\Gamma_1(N,r);k) &= \sum_{l^2|n,(l,N)=1} T(l,n/l;\Gamma_1(N,r);k) \\ &= n^{k/2-1} \sum_{\substack{a|n,(a,N)=1 \\ b(\bmod n/a)}} \left[\nu(a)\begin{pmatrix} a & rb \\ 0 & n/a \end{pmatrix}\right]_{k}. \end{aligned} \tag{27.50}$$

类似于定理 25.3 有(证明留给读者)

定理 27.7　(i) 当 $l \in N,(l,N)=1$ 时,有

$$T(al,dl;\Gamma_0(N,r);2k) = l^{2k-2}T(a,d;\Gamma_0(N,r);2k), \tag{27.51}$$

$$\begin{aligned} T(al,dl;\Gamma_1(N,r);k)f &= l^{k-2}T(a,d;\Gamma_1(N,r);k)(f\circ[\nu(l)]_k) \\ &= l^{k-2}(T(a,d;\Gamma_1(N,r);k)f)\circ[\nu(l)]_k. \end{aligned} \tag{27.52}$$

特别的,

$$T(l,l;\Gamma_0(N,r);2k)f = l^{2k-2}f, \tag{27.53}$$

$$T(l,l;\Gamma_1(N,r);k)f = l^{k-2}(f\circ[\nu(l)]_k). \tag{27.54}$$

(ii)　$T(1,n;\Gamma_0(N,r);2k)$

$$= \sum_{d^2|n,(d,N)=1} \mu(d)d^{2k-2}T(n/d^2;\Gamma_0(N,r);2k); \tag{27.55}$$

$T(1,n;\Gamma_1(N,r);k)f$

$$= \sum_{d^2|n,(d,N)=1} \mu(d)d^{k-2}T(n/d^2;\Gamma_1(N,r);k)(f\circ[\nu(d)]_k). \tag{27.56}$$

此外,(iii) 当 $f\in V_k(\Gamma_1(N,r))$ 时,有

$$f\circ[\sigma]_k \in V_k(\Gamma_1(N,r)),\quad \sigma\in\Gamma_0(N,r). \tag{27.57}$$

下面我们直接来研究 $T(n;\Gamma_0(N,r);2k)$,$T(n;\Gamma_1(N,r);k)$的

性质，并简记

$$T(n;\Gamma_0(N,r))=T(n;\Gamma_0(N,r);2k), \tag{27.58}$$

$$T(n;\Gamma_1(N,r))=T(n;\Gamma_1(N,r);k). \tag{27.59}$$

方法和结论与 §25 中直接讨论 $T(n)$ 是一样的，但较复杂. 先来讨论 $T(n;\Gamma_0(N,r))$.

定理 27.8 我们有

$$\begin{aligned}T(m;\Gamma_0(N,r))T(n;\Gamma_0(N,r))&=\sum_{g\mid(m,n),(g,N)=1}g^{2k-1}T(mn/g^2;\Gamma_0(N,r))\\&=\sum_{g\mid(m,n),(g,N)=1}gT(g,g;\Gamma_0(N,r))T(mn/g^2;\Gamma_0(N,r)).\end{aligned} \tag{27.60}$$

因此，Hecke 算子 $T(n;\Gamma_0(N,r))$ 的乘法是可交换的. 特别有

$$T(m;\Gamma_0(N,r))T(n;\Gamma_0(N,r))=T(mn;\Gamma_0(N,r)),\quad (m,n)=1. \tag{27.61}$$

证 由式(27.49)得(略去算子 $[\sigma]_{2k}$ 的下标不写)

$$\begin{aligned}&T(m;\Gamma_0(N,r))T(n;\Gamma_0(N,r))\\&=\left\{n^{k-1}\sum_{\substack{a_1\mid n,(a_1,N)=1\\ b_1 \bmod n/a_1}}\left[\begin{pmatrix}a_1 & rb_1\\ 0 & n/a_1\end{pmatrix}\right]\right\}\\&\circ\left\{m^{k-1}\sum_{\substack{a_2\mid m,(a_2,N)=1\\ b_2 \bmod m/a_2}}\left[\begin{pmatrix}a_2 & rb_2\\ 0 & m/a_2\end{pmatrix}\right]\right\}\\&=(mn)^{k-1}\sum_{a_1,b_1}\sum_{a_2,b_2}\left[\begin{pmatrix}a_1a_2 & r(a_1b_2+mb_1/a_2)\\ 0 & mn/a_1a_2\end{pmatrix}\right].\end{aligned} \tag{27.62}$$

设 $(a_1,m/a_2)=g$，$a_1=ga_1'$，$m=gm'$，$n=gn'$，我们有

$$(g,N)=1,\quad a_2\mid m',\quad 及\quad (a_1',m'/a_2)=1. \tag{27.63}$$

由此及上式推出

$$\begin{aligned}&T(m;\Gamma_0(N,r))T(n;\Gamma_0(N,r))\\&=(mn)^{k-1}\sum_{\substack{g\mid(m,n)\\(g,N)=1}}\sum_{\substack{a_1'\mid n',(a_1',N)=1\\ b_1 \bmod n'/a_1'}}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{a_2\mid m',(a_2,N)=1\\ b_2 \bmod gm'/a_2}}\end{aligned}$$

$$\left[\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1'a_2 & r(a_1'b_2 + m'b_1/a_2) \\ 0 & m'n'/(a_1'a_2) \end{pmatrix}\right], \qquad (27.64)$$

其中求和条件 * 表示 a_1', a_2 满足式(27.63). 进而有

$$\begin{aligned} & T(m;\Gamma_0(N,r))T(n;\Gamma_0(N,r)) \\ &= (mn)^{k-1} \sum_{\substack{g|(m,n) \\ (g,N)=1}} \left\{ \sum_{a_1',b_1} \left[\begin{pmatrix} a_1' & rb_1 \\ 0 & n'/a_1' \end{pmatrix}\right]\right\} \\ &\quad \circ \left\{ \sum_{a_2,b_2}{}^{*} \left[\begin{pmatrix} a_2 & rb_2 \\ 0 & m'/a_2 \end{pmatrix}\right]\right\}. \end{aligned} \qquad (27.65)$$

容易看出(为什么)

$$\sum_{b_2 \bmod gm'/a_2} \left[\begin{pmatrix} a_2 & rb_2 \\ 0 & m'a_2 \end{pmatrix}\right] = \sum_{s \bmod g} \sum_{b_2' \bmod m'/a_2} \left[\begin{pmatrix} 1 & rs \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & rb_2' \\ 0 & m'/a_2 \end{pmatrix}\right]. \qquad (27.66)$$

因此,

$$\begin{aligned} & T(m;\Gamma_0(N,r))T(n;\Gamma_0(N,r)) \\ &= (mn)^{k-1} \sum_{g} \left\{ \sum_{s}\sum_{a_2}\sum_{b_2'}\sum_{a_1'}{}^{*} \sum_{b_1 \bmod n'/a_1'} \right. \\ &\quad \left. \left[\begin{pmatrix} a_1' & rb_1 \\ 0 & n'/a_1' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & rs \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & rb_2' \\ 0 & m'/a^2 \end{pmatrix}\right]\right\} \\ &= (mn)^{k-1} \sum_{g} \left\{ \sum_{s}\sum_{a_2}\sum_{b_2'}\sum_{a_1'}{}^{*} \left\{ \sum_{b_1 \bmod n'/a_1'} \right.\right. \\ &\quad \left.\left. \left[\begin{pmatrix} a_1' & r(b_1 + a_1's) \\ 0 & n'/a_1' \end{pmatrix}\right]\right\} \circ \left[\begin{pmatrix} a_2 & rb_2' \\ 0 & m'/a_2 \end{pmatrix}\right]\right\}. \end{aligned} \qquad (27.67)$$

注意到对固定的 s 和 a_1', b_1 和 $b_1 + a_1's$ 同时遍历模 n'/a_1' 的完全剩余系,以及(为什么)

$$f \circ \left\{ \sum_{b_1 \bmod n'/a_1'} \left[\begin{pmatrix} a_1' & r(b_1 + a_1's) \\ 0 & n'/a_1' \end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$= f \circ \left\{ \sum_{b_1' \bmod n'/a_1'} \left[\begin{pmatrix} 1 & rs' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' & rb_1' \\ 0 & n'/a_1' \end{pmatrix} \right] \right\}$$

$$= f \circ \left\{ \sum_{b_1' \bmod n'/a_1'} \left[\begin{pmatrix} a_1' & rb_1' \\ 0 & n'/a_1' \end{pmatrix} \right] \right\}, \quad f \in V_{2k}(\Gamma_0(N,r)),$$

(27.68)

其中 b_1' 遍历模 n'/a_1' 的一个完全剩余系，s' 由 b_1 和 b_1' 确定. 这样就有

$$T(m;\Gamma_0(N,r))T(n;\Gamma_0(N,r))$$

$$= (mn)^{k-1} \sum_g \left\{ g \sum_{\substack{a_1' \mid n', (a_1', N)=1 \\ b_1' \bmod n'/a_1'}} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{a_2 \mid m', (a_2, N)=1 \\ b_2' \bmod m'/a_2}} \left[\begin{pmatrix} a_1' a_2 & r(a_1' b_2' + m' b_1'/a_2) \\ 0 & m'n'/(a_1' a_2) \end{pmatrix} \right] \right\}. \qquad (27.69)$$

由求和条件(27.63)推出：(i) $a_1'b_2' + m'b_1'/a_2$ 遍历模 $m'n'/(a_1'a_2)$ 的完全剩余系的充要条件是 b_1', b_2' 分别遍历模 n'/a_1'，模 m'/a_2 的完全剩余系；(ii) 对任一 $a \mid m'n'$ 必可惟一分解为(为什么)

$$a = a_1' a_2, \quad a_2 \mid m', \quad (a_1', m'/a_2) = 1, \quad 及 \quad a_1' \mid n'.$$

(27.70)

这样，类似于上式的推导过程，由上式得

$$T(m;\Gamma_0(N,r))T(n;\Gamma_0(N,r))$$

$$= (mn)^{k-1} \sum_{\substack{g \mid (m,n) \\ (g,N)=1}} g \left\{ \sum_{\substack{a \mid m'n', (a,N)=1 \\ b \bmod m'n'/a}} \left[\begin{pmatrix} a & rb \\ 0 & m'n'/a \end{pmatrix} \right] \right\}.$$

(27.71)

由此及式(27.49)和(27.53)就推出所要结论. 证毕.

类似于由定理 25.5 推出推论 25.6 和 25.7，由定理 27.8 可得到相应的推论(证明留给读者).

推论 27.9 设 l 是正整数，p 是素数. 那么，

(i) 当 $p \nmid N$ 时，$T(p^l;\Gamma_0(N,r))$ 是 $T(p;\Gamma_0(N,r))$ 的 l 次整系数多项式；

(ii) 当 $p|N$ 时，

$$T(p^l;\Gamma_0(N,r)) = T^l(p;\Gamma_0(N,r)); \qquad (27.72)$$

以及(iii) $T(n;\Gamma_0(N,r))$为系数的形式 Dirichlet 级数有如下的 Euler 恒等式成立：

$$\sum_{n=1}^{\infty} T(n;\Gamma_0(N,r))n^{-s}$$
$$= \prod_{(p,N)=1}(1 - T(p;\Gamma_0(N,r))p^{-s} + pT(p,p;\Gamma_0(N,r))p^{-2s})^{-1}$$
$$\times \prod_{p|N}(1 - T(p;\Gamma_0(N,r))p^{-s})^{-1}. \qquad (27.73)$$

因而，Hecke 算子环 $H(\Gamma_0(N,r))(=H(\Gamma_0(N,r);2k))$是由

$$T(p;\Gamma_0(N,r)),\quad T(p,p;\Gamma_0(N,r)),\quad p\nmid N;$$
$$T(p;\Gamma_0(N,r)),\quad p|N \qquad (27.74)$$

生成的多项式代数.

下面来讨论 $T(n;\Gamma_1(N,r))$，我们将得到与 $T(n;\Gamma_0(N,r))$完全一致的结论，且所用的方法完全一样，要注意的只是这里会出现一个因子 $\nu(l)$(见式(27.41)).

定理 27.10　我们有

$$T(m;\Gamma_1(N,r))T(n;\Gamma_1(N,r))$$
$$= \sum_{g|(m,n),(g,N)=1} gT(mn/g^2;\Gamma_1(N,r))T(g,g;\Gamma_1(N,r))$$
$$= \sum_{g|(m,n),(g,N)=1} gT(g,g;\Gamma_1(N,r))T(mn/g^2;\Gamma_1(N,r)). \qquad (27.75)$$

因此，Hecke 算子 $T(n;\Gamma_1(N,r))$的乘法是可交换的. 特别有

$$T(m;\Gamma_1(N,r))T(n;\Gamma_1(N,r)) = T(mn;\Gamma_1(N,r)),$$
$$(m,n) = 1. \qquad (27.76)$$

证　类似于式(27.62)，由式(27.50)(略去算子$[\sigma]_k$ 的下标 k 不写)得

$$T(m;\Gamma_1(N,r))T(n;\Gamma_1(N,r))$$
$$= (mn)^{k/2-1}\sum_{\substack{a_1|n,(a_1,N)=1\\ b_1 \bmod n/a_1}}\ \sum_{\substack{a_2|m,(a_2,N)=1\\ b_2 \bmod m/a_2}}\left[\nu(a_1)\begin{pmatrix}a_1 & rb_1\\ 0 & n/a_1\end{pmatrix}\nu(a_2)\begin{pmatrix}a_2 & rb_2\\ 0 & m/a_2\end{pmatrix}\right]$$

$$= (mn)^{k/2-1}\sum_{a_2,b_2}[\nu(a_2)]$$

$$\circ \sum_{a_1,b_1}\left\{\left[\nu^{-1}(a_2)\nu(a_1)\begin{pmatrix} a_1 & rb_1 \\ 0 & n/a_1 \end{pmatrix}\nu(a_2)\right]\right\}\circ\left[\begin{pmatrix} a_2 & rb_2 \\ 0 & m/a_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= (mn)^{k/2-1}\sum_{a_2,b_2}[\nu(a_2)]\circ\left\{\sum_{a_1,b_1}\left[\nu(a_1)\begin{pmatrix} a_1 & rb_1 \\ 0 & n/a_1 \end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$\circ\left[\begin{pmatrix} a_2 & rb_2 \\ 0 & m/a_2 \end{pmatrix}\right], \tag{27.77}$$

最后一步用到了：对固定的 a_2，

$$\left\{\nu(a_1)\begin{pmatrix} a_1 & rb_1 \\ 0 & n/a_1 \end{pmatrix}\right\} \quad 和 \quad \left\{\nu^{-1}(a_2)\nu(a_1)\begin{pmatrix} a_1 & rb_1 \\ 0 & n/a_1 \end{pmatrix}\nu(a_2)\right\}$$

同为 $\Gamma_1(N,r)\backslash M_1(n;N,r)$ 的右陪集分解代表系，以及式(27.57)(注意：这一点将在以后反复用到并不再说明，这是与定理 27.8 不同之处). 进而，利用式(27.62)～(27.65)的推导方法(符号意义亦相同)得到

$$T(m;\Gamma_1(N,r))T(n;\Gamma_1(N,r))$$

$$= (mn)^{k/2-1}\sum_{\substack{g\mid(m,n)\\(g,N)=1}}\ \sum_{\substack{a_2\mid m',\,(a_2,N)=1\\ b_2 \bmod gm'/a_2}}[\nu(a_2)]$$

$$\circ \sideset{}{^*}\sum_{\substack{a_1'\mid n',\,(a_1',N)=1\\ b_1 \bmod n'/a_1'}}\left[\nu(a_1'g)\circ\begin{pmatrix} a_1' & rb_1 \\ 0 & n'/a_1 \end{pmatrix}\right]\circ\left[\begin{pmatrix} a_2 & rb_2 \\ 0 & m'/a_2 \end{pmatrix}\right].$$

由此再利用式(27.65)～(27.67)的推导方法(符号意义亦相同)推出：

$$T(m;\Gamma_1(N,r))T(n;\Gamma_1(N,r))$$

$$= (mn)^{k/2-1}\sum_{\substack{g\mid(m,n)\\(g,N)=1}}\ \sum_{s \bmod g}\ \sum_{\substack{a_2\mid m',\,(a_2,N)=1\\ b_2' \bmod m'/a_2}}\ \sideset{}{^*}\sum_{a_1'}[\nu(a_2)\nu(a_1'g)]$$

$$\circ \sum_{b_1 \bmod n'/a_1'}\left[\begin{pmatrix} a_1' & r(b_1+a_1's) \\ 0 & n'/a_1' \end{pmatrix}\right]\circ\left[\begin{pmatrix} a_2 & rb_2' \\ 0 & m'/a_2 \end{pmatrix}\right].$$

进一步利用式(27.67)～(27.69)的推导方法(注意：式(27.68)中的

条件 $f\in V_{2k}(\Gamma_0(N,r))$ 改为 $f\in V_k(\Gamma_1(N,r))$，由上式得到（符号意义相同）：

$$T(m;\Gamma_1(N,r))T(n;\Gamma_1(N,r))$$
$$=(mn)^{k/2-1}\sum_g g[\nu(g)]\circ\sum_{a_2,b_2'}\sum_{a_1'}{}^*[\nu(a_1'a_2)]$$
$$\circ\sum_{b_1\bmod n'/a_1'}\left[\begin{pmatrix}a_1'a_2 & r(a_1'b_2'+m'b_1'/a_2)\\ 0 & m'n'/(a_1'a_2)\end{pmatrix}\right].$$

最后，利用式(27.69)～(27.71)的推导方法，由上式得

$$T(m;\Gamma_1(N,r))T(n;\Gamma_1(N,r))$$
$$=(mn)^{k/2-1}\sum_g g[\nu(g)]\circ\sum_{\substack{a\mid m'n',(a,N)=1\\ b\bmod m'n'/a}}\left[\nu(a)\begin{pmatrix}a & rb\\ 0 & m'n'/a\end{pmatrix}\right].$$

由此及式(27.50)和(27.54)就证明了定理(这里要用到式(27.77)后的说明).

由定理 27.10 立即得到(证明留给读者)

推论 27.11 设 l 是正整数，p 是素数. 那么，

(i) 当 $p\nmid N$ 时，$T(p^l;\Gamma_1(N,r))$ 是 $T(p;\Gamma_1(N,r))$ 的 l 次整系数多项式；

(ii) 当 $p\mid N$ 时，

$$T(p^l;\Gamma_1(N,r))=T^l(p;\Gamma_1(N,r));\qquad(27.78)$$

以及(iii) $T(n;\Gamma_1(N,r))$ 为系数的形式 Dirichlet 级数有如下的 Euler 恒等式成立：

$$\sum_{n=1}^{\infty}T(n;\Gamma_1(N,r))n^{-s}$$
$$=\prod_{(p,N)=1}(1-T(p;\Gamma_1(N,r))p^{-s}+pT(p,p;\Gamma_1(N,r))p^{-2s})^{-1}$$
$$\times\prod_{p\mid N}(1-T(p;\Gamma_1(N,r))p^{-s})^{-1}.\qquad(27.79)$$

因而，Hecke 算子环 $H(\Gamma_1(N,r))(=H(\Gamma_1(N,r);2k))$ 是由

$$\begin{matrix}T(p;\Gamma_1(N,r)), & T(p,p;\Gamma_1(N,r)), & p\nmid N;\\ T(p;\Gamma_1(N,r)), & & p\mid N\end{matrix}\qquad(27.80)$$

生成的多项式代数.

我们已经清楚看到定理 27.8 和定理 27.10 的证明是完全平行的. 这实质上是由这两个 Hecke 算子环(即 Hecke 代数)是同构所决定的. 请读者自己找出两者之间的同构对应,即证明

定理 27.12 Hecke 代数 $H(\Gamma_0(N,r))$和 $H(\Gamma_1(N,r))$是同构的.

这样,定理 27.8 和 27.10 就只要证明一个,而另一个就由此推出. 这是一个理解同构概念及其重要性的很好例子.

讨论同余子群 Hecke 算子的另一途径是从所谓"模点函数"(见第五章问题 8,9)的角度来讨论,参看[NK,第三章 § 5].

§ 28 同余子群的 Hecke 算子的自伴性、尖形式空间的正交基

§ 26 证明了完全模群 Γ 的 Hecke 算子是 Petersson 内积的自伴算子,这一结论能否推广到同余子群的 Hecke 算子上去呢? 两者情形有所不同,主要是由于对一般同余子群定理 27.4 并不一定成立. 本节讨论同余子群 $\Gamma_0(N,r)$和 $\Gamma_1(N,r)$,对它们来说,回答基本上是肯定的,差别在于仅当$(|\alpha|,N)=1$ 及$(n,N)=1$ 时,对相应的 Hecke 算子这一结论才成立(但形式有差别). 本节的证明方法仍是利用双陪集理论,与 § 26 相同. 此外,也要讨论由相应的联立特征尖形式组成的标准正交基. 先来讨论同余子群 $\Gamma_0(N,r)$的 Hecke 算子.

定理 28.1 (i) $f,g\in M_{2k}(\Gamma_0(N,r))$,且至少有一个是尖形式,以及 $\alpha\in M(N,r)$. 那么,当$(|\alpha|,N)=1$ 时,有

$$\langle T(\alpha,\Gamma_0(N,r))f,g\rangle = \langle f,T(\alpha,\Gamma_0(N,r))g\rangle, \qquad (28.1)$$

即 Hecke 算子 $T(\alpha,\Gamma_0(N,r))((|\alpha|,N)=1)$是 Petersson 内积的自伴算子;

(ii) 在尖形式空间 $S_{2k}(\Gamma_0(N,r))$中,$T(\alpha,\Gamma_0(N,r))((|\alpha|,N)=1)$的特征值是实数.

证 先来证(i). 设有双陪集分解

$$\Gamma_0(N,r)\alpha\Gamma_0(N,r) = \bigcup_{j=1}^{n(\alpha)}\Gamma_0(N,r)\alpha\eta_j,$$

$$\eta_j\in\Gamma_0(N,r),\quad 1\leqslant j\leqslant n(\alpha).$$

利用定理 21.10(取 $\Gamma'=\Gamma_0(N,r)$),由上式得(类似式(26.2))

$$\langle T(\alpha,\Gamma_0(N,r))f,g\rangle = n(\alpha)|\alpha|^{k-1}\langle f,g\circ[\tilde{\alpha}]_{2k}\rangle, \tag{28.2}$$

其中 $\tilde{\alpha}=|\alpha|\alpha^{-1}$(见式(21.17)). 由定理 34.6(i)知,

$$\Gamma_0(N,r)\alpha\Gamma_0(N,r) = \Gamma_0(N,r)\tilde{\alpha}\,\Gamma_0(N,r).$$

因此有

$$n(\alpha) = n(\tilde{\alpha}),\quad T(\alpha,\Gamma_0(N,r)) = T(\tilde{\alpha},\Gamma_0(N,r)). \tag{28.3}$$

另一方面,同式(28.2)一样可得

$$\langle f,T(\tilde{\alpha},\Gamma_0(N,r))\rangle = n(\tilde{\alpha})|\tilde{\alpha}|^{k-1}\langle f,g\circ[\tilde{\alpha}]_{2k}\rangle.$$

由以上三式即得所要结论. 下面来证(ii). 设 $f\in S_{2k}(\Gamma_0(N,r))$,$\lambda$ 是复数,及 $T(\alpha,\Gamma_0(N,r))f=\lambda f$. 在式(28.1)中取 $g=f$,由式(28.1)推出 $\lambda=\bar{\lambda}$,即 λ 是实数. 证毕.

定理 28.2　(i) 设 $f,g\in M_{2k}(\Gamma_0(N,r))$,且至少有一个是尖形式,及 $(n,N)=1$. 那么有

$$\langle T(n;\Gamma_0(N,r))f,\ g\rangle = \langle f,\ T(n;\Gamma_0(N,r))g\rangle, \tag{28.4}$$

即 Hecke 算子 $T(n;\Gamma_0(N,r))((n,N)=1)$是 Petersson 内积的自伴算子.

(ii) 在尖形式空间 $S_{2k}(\Gamma_0(N,r))$中,$T(n;\Gamma_0(N,r))((n,N)=1)$的特征值是实数.

证　(i) 由定理 28.1 及式(27.49)的第一式推出. (ii)的证明同定理 28.1(ii).

关于标准正交基有下面的结论.

定理 28.3　尖形式空间 $S_{2k}(\Gamma_0(N,r))$一定有一组标准正交基,其中每个元素都是 Hecke 算子 $T(n;\Gamma_0(N,r))((n,N)=1)$的联立特征尖形式.

定理的证明过程与定理 26.7 完全一样,需要类似的引理 26.8～26.10,并用 $T(n;\Gamma_0(N,r))$代替 $T(n)$,不同之处仅在于原来的所有推导在这里仅当满足条件$(n,N)=1$ 时才成立. 详细的证明留给读者.

现在来讨论同余子群 $\Gamma_1(N,r)$ 的 Hecke 算子.

定理 28.4 设 $f,g\in M_k(\Gamma_1(N,r))$，且至少有一个是尖形式，以及 $\alpha\in M_1(n,N,r)$. 那么，当 $(n,N)=1$ 时有

$$\langle T(\alpha,\Gamma_1(N,r))f,\ g\rangle = \langle f\circ[\nu(n)]_k,\ T(\alpha,\Gamma_1(N,r))g\rangle, \tag{28.5}$$

其中 $\nu(n)$ 由式(34.38)给出.

证 显有，$\nu(n)\tilde{\alpha}\in M_1(n;N,r)$，这里 $\tilde{\alpha}=|\alpha|\alpha^{-1}$(见式(21.17)). 由定理 34.6(ii)知，$\Gamma_1(N,r)\alpha\Gamma_1(N,r)=\Gamma_1(N,r)\nu(n)\tilde{\alpha}\Gamma_1(N,r)$. 因而有

$$T(\nu(n)\tilde{\alpha},\Gamma_1(N,r)) = T(\alpha,\Gamma_1(N,r)). \tag{28.6}$$

同定理 28.1 的推导完全一样，利用定理 21.10(取 $\Gamma'=\Gamma_1(N,r)$)就可得到式(28.5). 具体推导留给读者.

由定理 28.4 及式(27.50)的第一式立即得到

定理 28.5 设 $f,g\in M_k(\Gamma_1(N,r))$，且至少有一个是尖形式，及 $(n,N)=1$. 那么有

$$\langle T(n;\Gamma_1(N,r))f,\ g\rangle = \langle f\circ[\nu(n)]_k,\ T(n;\Gamma_1(N,r))g\rangle. \tag{28.7}$$

比较定理 28.1，28.2 和定理 28.4，28.5，可看出对 $\Gamma_0(N,r)$ 的 Hecke 算子和 $\Gamma_1(N,r)$ 的 Hecke 算子在‘自伴性’的形式上有明显的不同，即多出一个运算 $[\nu(n)]_k$，是不对称的. 但我们有下面的定理.

定理 28.6 (i) 设 $f,g\in M_k(\Gamma_0(N,r),\chi)$，且至少有一个是尖形式，$(n,N)=1$，及 $c_n^2=\bar{\chi}(n)$(c_n 取定一值). 那么有

$$\langle (c_nT(\alpha;\Gamma_1(N,r))f,g\rangle = \langle f,(c_nT(\alpha;\Gamma_1(N,r))g\rangle, \tag{28.8}$$

$$\langle (c_nT(n;\Gamma_1(N,r))f,g\rangle = \langle f,(c_nT(n;\Gamma_1(N,r))g\rangle, \tag{28.9}$$

即 Hecke 算子 $c_nT(\alpha;\Gamma_1(N,r))$ $((|\alpha|,N)=1)$ 及 $c_nT(n;\Gamma_1(N,r))$ $((n,N)=1)$ 是 Petersson 内积的自伴算子.

(ii) 在尖形式空间 $S_k(\Gamma_0(N,r),\chi)$ 中，$c_nT(\alpha;\Gamma_1(N,r))$ $((|\alpha|,N)=1)$ 及 $c_nT(n;\Gamma_1(N,r))$ $((n,N)=1)$ 的特征值是实数.

证　我们讨论 $r=1$ 的情形，一般的留给读者. 由性质 15.16 知，$f\in M_k(\Gamma_0(N,r),\chi)$ 时，有 $f\circ[\nu(n)]_k=\chi(n)f$. 由此及式(28.5)和(28.7)就分别推出式(28.8)和(28.9). (ii)的证明留给读者.

因此，关于标准正交基有下面的结论：

定理 28.7　尖形式空间 $S_k(\Gamma_1(N,r),\chi)$ 一定有一组标准正交基，其中每个元素都是 Hecke 算子 $c_nT(n;\Gamma_1(N,r))((n,N)=1)$ 的联立特征尖形式.

定理的证明过程与定理 28.3 相同，留给读者.

问　　题

1. 写出 $S_{2k}(\Gamma_0(N))$ 和 $M_{2k}(\Gamma_0(N))$ 的维数公式，并具体求出 $1\leqslant k\leqslant 8, 1\leqslant N\leqslant 12$ 时它们的维数.

2. 证明：$\Delta(z),\Delta(2z)$ 是 $S_{12}(\Gamma_0(2))$ 的一组基.

3. 设 $f\in M_k(\Gamma_0(N),\chi)$，$l$ 是正整数. 证明：
$$f\circ[B_{(l)}]_k\in M_k(\Gamma_0(Nl),\chi).$$

4. 设 $(n,lN)=1$，$f\in M_k(\Gamma_0(N,r),\chi)$. 证明：算子 $[B_{(l)}]_k$ 和算子 $T(n;\Gamma_1(N,r))$ 可交换，即
$$(T(n;\Gamma_1(N,r))f)\circ[B_{(l)}]_k=T(n;\Gamma_1(N,r))(f\circ[B_{(l)}]_k).$$

5. (i) 设 $r\mid N$，$f(z)$ 是 $\Gamma_0(N/r)$ 的 Hecke 算子 $T(n)$，$(n,N)=1$，的联立特征形式. 证明：$f(rz)$ 是 $\Gamma_0(N)$ 的 Hecke 算子 $T(n)$，$(n,N)=1$，的联立特征形式.

(ii) 证明：$\Delta(z),\Delta(2z)$ 都是 $S_{12}(\Gamma_0(2))$ 上的 Hecke 算子 $T(n)$，$(n,2)=1$，的联立特征形式，且有相同的特征值.

6. 设 $(n,N)=1$，$r\mid N$. 证明：
$$(T(n)f)\circ[B_{(r)}]_k=T(n)(f\circ[B_{(r)}]_k),\quad f\in S_k(\Gamma_0(N/r)).$$

7. 设 $\chi \bmod q\Leftrightarrow\chi^* \bmod q^*$（符号意义见式(35.12)). 再设 q',d 满足 $q^*\mid q'$，$q'd\mid q$，以及 $\chi' \bmod q'\Leftrightarrow\chi^* \bmod q^*$. 证明：由 $f(z)\in S_k(\Gamma_0(q'),\chi')$ 可推出 $f(dz)\in S_k(\Gamma_0(q),\chi)$.

8. 在上面第 7 题的符号下，记 $S(\Gamma_0(q),\chi)$ 中由所有满足 $f(z)\in S_k(\Gamma_0(q'),\chi')$，对所有可能的 $q'<q$，$q^*\mid q'$，$dq'\mid q$ 所给出的

$f(dz)$ 组成的子空间记作 $S_k^{\text{old}}(\Gamma_0(q),\chi)$. 它的正交补空间记作 $S_k^{\text{new}}(\Gamma_0(q),\chi)$. 证明：

(i) 在 Hecke 算子 $T(n),(n,q)=1$ 的作用下, S_k^{new} 和 S_k^{old} 均保持不变，且各具有一组由 $T(n),(n,q)=1$, 的联立特征形式组成的正交基；

(ii) 证明：$\dim S_{12}^{\text{new}}(\Gamma_0(2))=0$.

可以证明：在 $S_k^{\text{new}}(\Gamma_0(q),\chi)$中具有由所有 $T(n)$的联立特征形式组成的正交基，而不需限制条件$(n,q)=1$.

第十章　模形式与 Dirichlet 级数

模形式理论的重要组成部分是讨论模形式与 L 函数的关系. 本章对此作了初步讨论,即在 § 30 和 § 31 分别证明了 Hecke 定理和 Weil 定理. 在 § 29 讨论了模形式的判别及其 Fourier 展式的系数估计,这既是为后两节作准备,也因为它本身是模形式理论的重要课题.

§ 29　模形式的判别及尖形式的 Fourier 系数估计

本节要讨论对给定的同余子群 Γ' 的模函数如何判别它是否是一个模形式或尖形式,以及如何估计模形式和尖形式的 Fourier 展式的系数,后者是一个极为重要需进一步研究的问题.

定理 29.1　设 q 是正整数,$f(z)$ 在 $\boldsymbol{H}$ 内解析,在无穷远点有 Laurent 展式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z/q}, \quad z \in \boldsymbol{H}. \tag{29.1}$$

如果存在正数 ε, μ,使对 $\mathrm{Re}z$ 一致地有

$$f(z) \ll \exp(2\pi(1-\varepsilon)\mathrm{Im}z/q), \quad \mathrm{Im}z \to +\infty, \tag{29.2}$$

及

$$f(z) \ll (\mathrm{Im}z)^{-\mu}, \quad \mathrm{Im}z \to 0 \tag{29.3}$$

成立,那么

$$a_n = 0, \quad n < 0; \quad a_n \ll n^{\mu}, \quad n \geqslant 1. \tag{29.4}$$

证　对任意的整数 n 及 $z_0 = x_0 + iy_0 \in \boldsymbol{H}$ 有

$$a_n = \frac{1}{q}\int_{z_0}^{z_0+q} e^{-2\pi i n z/q} f(z)\mathrm{d}z \ll e^{2\pi n y_0/q} \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0+q} |f(x+iy_0)|. \tag{29.5}$$

当 $n<0$ 时,由此及条件(29.2)得

$$a_n \ll \exp(2\pi(n+1-\varepsilon)y_0/q) \to 0, \quad y_0 \to +\infty;$$

当 $n \geqslant 1$ 时,由式(29.5)及条件(29.3)得

$$a_n \ll e^{2\pi n y_0/q} y_0^{-\mu} \ll n^{\mu}, \quad y_0 = n^{-1}.$$

由以上两式就推出式(29.4).

下面的定理实质上是定理 29.1 的逆定理.

定理 29.2 设 ν 为一正数,复数列 $a_n, n=0,1,2,\cdots$,满足

$$a_n \ll n^{\nu}, \quad n \geqslant 1. \tag{29.6}$$

那么

(i)
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z/q} \tag{29.7}$$

在 $\boldsymbol{H}$ 内解析,且在 $\boldsymbol{H}$ 的任一有限闭集上绝对一致收敛;

(ii) $f(z)$ 对 $\mathrm{Re}z$ 一致地有

$$f(z) \ll (\mathrm{Im}z)^{-\nu-1}, \quad \mathrm{Im}z \to 0, \tag{29.8}$$

及

$$f(z) - a_0 \ll e^{-2\pi \mathrm{Im}z/q}, \quad \mathrm{Im}z \to +\infty. \tag{29.9}$$

证 利用 Γ 函数的性质(见性质 36.2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\nu}}{(-1)^n \binom{-\nu-1}{n}} = \Gamma(\nu+1),$$

由条件(29.6)得

$$a_n \ll (-1)^n \binom{-\nu-1}{n}. \tag{29.10}$$

因而有

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n e^{2\pi i n z/q}| \ll \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\nu-1}{n} e^{-2\pi n y/q}$$
$$= (1-e^{-2\pi y/q})^{-\nu-1}.$$

这就证明了(i). 利用熟知的估计式

$$1 - e^{-2\pi y/q} \ll y/q, \quad y \to +0,$$

由上式推出式(29.8). 利用式(29.10)有

$$|f(z) - a_0| \ll \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{-\nu-1}{n} e^{-2\pi n y/q} \ll e^{-2\pi y/q},$$

这就证明了式(29.9).

定理 29.3 设整数 $k\geqslant 3$,$f(z)$在 $\boldsymbol{H}$ 内解析,Γ'是同余子群,以及满足

$$f\circ[\sigma]_k=f,\quad \sigma\in\Gamma'. \tag{29.11}$$

那么,若存在正数 μ,使对 $\mathrm{Re}z$ 一致地有

$$f(z)\ll(\mathrm{Im}z)^{-\mu},\quad \mathrm{Im}z\to 0 \tag{29.12}$$

成立,则 $f\in M_k(\Gamma')$,以及当 $\mu<k$ 时,$f\in S_k(\Gamma')$.

证 设 $\Gamma(q)\subseteq\Gamma'$,由条件(29.11)知 $f(z+q)=f(z)$,所以有展式(29.1)成立. 显见,定理的第一部分就是要证明,当条件(29.12)成立时,$f(z)$在每个尖点处都是正则的. 先考虑有限尖点 $-s/r$,$r>0$,$(s,r)=1$. 此时必有 $\alpha\in\Gamma$,使 $\alpha(\mathrm{i}\infty)=-s/r$. f 在尖点 $-s/r$ 处的性质就是 $f\circ[\alpha]_k$ 在尖点 $\mathrm{i}\infty$处的性质. 显见,$f\circ[\alpha]_k$ 亦有形如式(29.1)的展式(为什么)

$$f\circ[\alpha]_k(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz/q},\quad z\in\boldsymbol{H}.$$

对 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0\in\boldsymbol{H}$,类似于式(29.5)有

$$b_n\ll\mathrm{e}^{2\pi ny_0/q}\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_0+q}|f\circ[\alpha]_k(x+\mathrm{i}y_0)|. \tag{29.13}$$

注意到所取的 α 必为

$$\alpha=\begin{bmatrix}-s & u\\ r & v\end{bmatrix}\in\Gamma,$$

故有

$$f\circ[\alpha]_k(z)=(rz+v)^{-k}f(\alpha(z)).$$

利用

$$|rz+v|\sim r\mathrm{Im}z,\quad \mathrm{Im}z\to+\infty,$$
$$\mathrm{Im}\alpha(z)=\mathrm{Im}z/|rz+v|^2\sim(r^2\mathrm{Im}z)^{-1},\quad \mathrm{Im}z\to+\infty, \tag{29.14}$$

由上式及条件(19.12)得到

$$f\circ[\alpha]_k(z)\ll(\mathrm{Im}z)^{-k}(\mathrm{Im}\alpha(z))^{-\mu}\ll(\mathrm{Im}z)^{\mu-k},\quad \mathrm{Im}z\to+\infty. \tag{29.15}$$

由此及式(29.13)就推出

$$b_n=0,\quad 若\ n<0; \tag{29.16}$$

及

$$b_0 = 0,\quad 若\ \mu < k. \tag{29.17}$$

这就证明了 $f\circ[\alpha]_k$ 在尖点 $i\infty$ 处正则，且当 $\mu<k$ 时其值为零，亦即 f 在尖点 $-s/r$ 处正则，且当 $\mu<k$ 时其值为零. 再来考虑尖点 $i\infty$. 必有 $\sigma\in\Gamma'$ 使得 $\sigma(i\infty)=-s/r, r>0, (r,s)=1$. 由定义知 $f(z)$ 在尖点 $i\infty$ 处的性质就是在 Γ' 等价尖点 $-s/r$ 处的性质. 由以上证明的结论就推出 f 在尖点 $i\infty$ 处正则，且当 $\mu<k$ 时其值为零. 这就证明了所要的结论.

定理 29.4 设整数 $k\geqslant3$，Γ' 是同余子群，$f(z)\in M_k(\Gamma')$. 再设

$$\psi(z) = (\mathrm{Im}z)^{k/2}|f(z)|,\quad z\in \boldsymbol{H}. \tag{29.18}$$

那么，$f(z)\in S_k(\Gamma')$ 的充要条件是

$$\psi(z) \ll 1,\quad z\in\boldsymbol{H}. \tag{29.19}$$

证 由式(29.14)的第一个等式立即推出

$$\psi\circ[\alpha]_0(z) = \psi(\alpha(z)) = (\mathrm{Im}z)^{k/2}|f\circ[\alpha]_k(z)|,$$
$$z\in\boldsymbol{H},\quad \alpha\in\Gamma. \tag{29.20}$$

由此及 $f\in M_k(\Gamma')$ 就推出

$$\psi\circ[\alpha]_0 = \psi,\quad \alpha\in\Gamma'. \tag{29.21}$$

因此，只要证明：$f\in S_k(\Gamma')$ 的充要条件是式(29.19)在 Γ' 的基本区域 $\Gamma'\backslash\boldsymbol{H}$ 上成立. 在基本区域 $\Gamma'\backslash\boldsymbol{H}$ 上只有 Γ' 的有限个尖点，在 $\Gamma'\backslash\boldsymbol{H}$ 中除去每个尖点的一个邻域(定义见 § 9 末)后所得的有限闭区域上，$|\psi(z)|$ 显然是有界的，因此，充要条件就是在每个尖点的一个邻域内式(29.19)成立，即 $|\psi(z)|$ 有界. 事实上，我们要证明更确切的结论：设 p 是一个尖点，那么 f 在尖点 p 处的值为零的充要条件是 $|\psi(z)|$ 在尖点 p 的一个邻域内有界. 设 $\sigma\in\Gamma$，$\sigma(i\infty)=p$(不管 p 是 $i\infty$ 或有限尖点)，由定义知

$$f(p) = f\circ[\sigma]_k(i\infty) = a_0.$$

由 $f\in M_k(\Gamma')$ 知，$f\circ[\sigma]_k(z)$ 必有形如式(29.7)的 Fourier 展式，利用式(29.20)得

$$\psi(\sigma(z)) = (\mathrm{Im}z)^{k/2}|f\circ[\sigma]_k(z)| = (\mathrm{Im}z)^{k/2}\left|a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi i nz/q}\right|. \tag{29.22}$$

注意到(见式(29.9))

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z/q} \ll e^{-2\pi \mathrm{Im} z/q},$$

由以上三式即得所要结论.

定理 29.5　设整数 $k \geqslant 3$, Γ' 是同余子群, $f(z) \in S_k(\Gamma')$. 再设尖点 $-s/r$, $(s,r)=1$, $\sigma(i\infty)=-s/r$, $\sigma \in \Gamma$, 以及 $f(z)$ 在尖点 $-s/r$ 的 Fourier 展式为

$$f \circ [\sigma]_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z/q}. \tag{29.23}$$

那么,有

$$a_n \ll n^{k/2}, \tag{29.24}$$

这里的 $\ll$ 常数和尖点无关.

证　对任意的 $z_0 = x_0 + iy_0 \in \boldsymbol{H}$, 我们有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{q}\int_{z_0}^{z_0+q} e^{-2\pi i n z/q} f \circ [\sigma]_k(z) \mathrm{d}z \\ &\ll e^{2\pi n y_0/q} \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0+q} |f \circ [\sigma]_k(x+iy_0)|. \end{aligned}$$

利用式(29.20),及定理 29.4 的结论:当 f 是尖形式时式(29.19)成立,立即推出:

$$a_n \ll e^{2\pi n y_0/q} y_0^{-k/2}.$$

取 $y_0 = n^{-1}$, 由上式即得所要结论.

定理 29.6　在定理 29.5 的条件和符号下,对任意的 $N \geqslant 1$ 有

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} |a_n|^2 \ll N^k. \tag{29.25}$$

证　设 $z_0 = x_0 + iy_0$. 由 Fourier 级数论中熟知的 Parseval 公式(这里用的是复数形式)得

$$\frac{1}{q}\int_{z_0}^{z_0+q} f \circ [\sigma]_k(z) \overline{f \circ [\sigma]_k(z)} \mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-4\pi n y_0/q}.$$

利用式(29.20)及定理 29.4,从上式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-4\pi n y_0/q} \ll y_0^{-k}.$$

取 $y_0 = N^{-1}$ 即得所要结论.

定理 29.6 表明:从平均意义上说有

$$a_n \ll n^{(k-1)/2}. \tag{29.26}$$

§ 30 Hecke 定理

设实数 $\alpha \geqslant 0$. 给定复数列 $\mathscr{A}=\{a_n, n=0,1,2,\cdots\}$,满足

$$a_n \ll n^{\alpha}, \quad n \geqslant 1. \tag{30.1}$$

我们可分别定义**相应于复数列 $\mathscr{A}$ 的 Dirichlet 级数**

$$L(s,\mathscr{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad \mathrm{Re}\, s > 1+\alpha, \tag{30.2}$$

及**相应于复数列 $\mathscr{A}$ 的 Fourier 级数**

$$f(z,\mathscr{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n z}, \quad z \in \boldsymbol{H}. \tag{30.3}$$

我们要来讨论两者间的关系. 利用 Γ 函数的表达式(见性质 36.4)

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{s-1} \mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}\, s > 0 \tag{30.4}$$

可得(为什么)

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,\mathscr{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi n t} t^{s-1} \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\infty} (f(\mathrm{i}t,\mathscr{A}) - a_0) t^{s-1} \mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}\, s > 1+\alpha. \tag{30.5}$$

为便于应用,引进参数 $R>0$,并记

$$\Lambda_R(s,\mathscr{A}) = (2\pi/\sqrt{R})^{-s}\Gamma(s)L(s,\mathscr{A}), \quad \mathrm{Re}\, s > 1+\alpha, \tag{30.6}$$

它称为是**相应于复数列 $\mathscr{A}$ 的标准 Dirichlet 级数**. 由以上两式得

$$\Lambda_R(s,\mathscr{A}) = \int_0^{\infty} (f(\mathrm{i}t/\sqrt{R},\mathscr{A}) - a_0) t^{s-1} \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{1} (f(\mathrm{i}t/\sqrt{R},\mathscr{A}) - a_0) t^{s-1} \mathrm{d}t$$
$$+ \int_1^{\infty} (f(\mathrm{i}t/\sqrt{R},\mathscr{A}) - a_0) t^{s-1} \mathrm{d}t$$
$$= -\frac{a_0}{s} + \int_1^{\infty} f(-1/(\mathrm{i}\sqrt{R}t),\mathscr{A}) t^{-s-1} \mathrm{d}t$$

$$+\int_1^{\infty}(f(\mathrm{i}t/\sqrt{R},\mathscr{A})-a_0)t^{s-1}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{Re}s>1+\alpha.\tag{30.7}$$

若另有复数列 $\mathscr{B}=\{b_n,n=0,1,2,\cdots\}$，满足

$$b_n\ll n^{\alpha},\quad n\geqslant 1,\tag{30.8}$$

同样可得

$$\Lambda_R(s,\mathscr{B})=-\frac{b_0}{s}+\int_1^{\infty}f(-1/(\mathrm{i}t\sqrt{R}),\mathscr{B})t^{-s-1}\mathrm{d}t$$
$$+\int_1^{\infty}(f(\mathrm{i}t/\sqrt{R},\mathscr{B})-b_0)t^{s-1}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{Re}s>1+\alpha.\tag{30.9}$$

由此清楚看出，$\Lambda_R(s,\mathscr{A})$和 $\Lambda_R(s,\mathscr{B})$（即 $L(s,\mathscr{A})$和 $L(s,\mathscr{B})$）的性质与关系同 $f(z,\mathscr{A})$和 $f(z,\mathscr{B})$的性质与关系之间应有密切联系. 以后我们总取定分支

$$z^w=\mathrm{e}^{w\log z},\quad z\neq 0,\quad -\pi<\arg(\log z)\leqslant\pi.\tag{30.10}$$

我们来证明下面的结论.

定理 30.1（Hecke） 设 k,R 是正数，复数列 $\mathscr{A}=\{a_n,n=0,1,2,\cdots\}$和复数列 $\mathscr{B}=\{b_n,n=0,1,2,\cdots\}$分别满足条件(30.1)和(30.8)，以及 $f(z,\mathscr{A})$，$f(z,\mathscr{B})$和 $\Lambda_R(s,\mathscr{A})$，$\Lambda_R(s,\mathscr{B})$分别由式(30.3)和(30.6)给出. 那么，以下两个命题等价：

(a) $f(z,\mathscr{B})=\mathrm{i}^k(z\sqrt{R})^{-k}f(-1/(Rz),\mathscr{A}),\quad z\in\boldsymbol{H};$

$$\tag{30.11}$$

(b) $\Lambda_R(s,\mathscr{A})$和 $\Lambda_R(s,\mathscr{B})$可解析开拓到整个复平面，且满足函数方程

$$\Lambda_R(s,\mathscr{A})=\Lambda_R(k-s,\mathscr{B}),\quad s\in\boldsymbol{Z},\tag{30.12}$$

以及

$$\Lambda_R(s,\mathscr{A})+a_0/s+b_0/(k-s)\tag{30.13}$$

在全平面解析，且在任一宽度有限的垂直长条上有界.

证　先证(a)⇒(b). 由式(30.7)和式(30.11)（取 $z=\mathrm{i}t/\sqrt{R}$）可推得

$$\Lambda_R(s,\mathscr{A})=-\frac{a_0}{s}+\int_1^{\infty}f(\mathrm{i}t/\sqrt{R},\mathscr{B})t^{k-s-1}\mathrm{d}t$$

$$+\int_1^{\infty}(f(\mathrm{i}t/\sqrt{R},\mathscr{A})-a_0)t^{s-1}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{Re}s>1+\alpha.$$

当 $\mathrm{Re}s>\max(k,1+\alpha)$时,有

$$\Lambda_R(s,\mathscr{A})=-\frac{a_0}{s}-\frac{b_0}{k-s}+\int_1^{\infty}(f(\mathrm{i}t/\sqrt{R},\mathscr{B})-b_0)t^{k-s-1}\mathrm{d}t$$
$$+\int_1^{\infty}(f(\mathrm{i}t/\sqrt{R})-a_0)t^{s-1}\mathrm{d}t. \tag{30.14}$$

由定理 29.2 知

$$f(\mathrm{i}t,\mathscr{A})-a_0\ll \mathrm{e}^{-2\pi t},\quad f(\mathrm{i}t,\mathscr{B})-b_0\ll \mathrm{e}^{-2\pi t}.$$

因此,式(30.14)右边的两个积分对所有的 s 均绝对收敛,且在 s 平面的任一宽度有限的垂直长条上一致收敛。所以,由式(30.14)知,$\Lambda_R(s,\mathscr{A})$可解析开拓到整个 s 平面,且由式(30.13)给出的函数在整个 s 平面解析.剩下还要证式(30.12)成立.完全同样的推导,由式(30.9) 和式(30.11)(取 $z=-(\mathrm{i}\sqrt{R}t)^{-1}$)可得

$$\Lambda_R(s,\mathscr{B})=\frac{-b_0}{s}+\int_1^{\infty}f(\mathrm{i}t/\sqrt{R},\mathscr{A})t^{k-s-1}\mathrm{d}t$$
$$+\int_1^{\infty}(f(\mathrm{i}t/\sqrt{R},\mathscr{B})-b_0)t^{s-1}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{Re}s>1+\alpha.$$

进而,当 $\mathrm{Re}s>\max(k,1+\alpha)$时,有

$$\Lambda_R(s,\mathscr{B})=\frac{-b_0}{s}-\frac{a_0}{k-s}+\int_1^{\infty}f(\mathrm{i}t/\sqrt{R},\mathscr{A})-a_0)t^{k-s-1}\mathrm{d}t$$
$$+\int_1^{\infty}(f(\mathrm{i}t/\sqrt{R},\mathscr{B})-b_0)t^{s-1}\mathrm{d}t. \tag{30.15}$$

由此及式(30.14)就推出式(30.12).下面来证(b)⇒(a).我们在证(a)⇒(b)时,关键的一点是利用了式(30.4),它是一般 Mellin 变换(见定理 36.7)

$$\int_0^{\infty}x^{s-1}g(x)=G(s) \tag{30.16}$$

的特殊情形,即取 $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$,$G(s)=\Gamma(s)$.现在要利用它的逆变换:

$$\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{Re}s=\sigma}x^{-s}\Gamma(s)\mathrm{d}s,\quad x>0,\ \sigma>0 \tag{30.17}$$

(见式(36.4)),来证明(b)⇒(a),这要利用 Γ 函数的性质.由式(30.17) 得

$$f(\mathrm{i}y,\mathscr{A})=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{-2\pi ny}=a_0+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{\mathrm{Re}s=\sigma}(2\pi ny)^{-s}\Gamma(s)\mathrm{d}s,$$
$$y>0,\quad \sigma>0. \tag{30.18}$$

由于对任意给定的实数 $a\leqslant b$，当 $a\leqslant\sigma\leqslant b$ 时，对 $|t|\to+\infty$ 一致地有渐近公式(见性质 36.6)

$$|\Gamma(s)|=\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\pi|t|/2}|t|^{\sigma-1/2}(1+O(|t|^{-1})), \tag{30.19}$$

因此，当 $\mathrm{Re}s>1+\alpha$ 时，式(30.18)右边可交换求和号与积分号，得到(利用式(30.6))

$$f(\mathrm{i}y,\mathscr{A})=a_0+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{Re}s=\sigma}(\sqrt{R}\,y)^{-s}\Lambda_R(s,\mathscr{A})\mathrm{d}s,$$
$$\sigma>1+\alpha,\quad y>0. \tag{30.20}$$

取定 $\sigma_1>1+\alpha$. 由式(30.19)知，对任意正数 $\mu>0$，有

$$\Lambda_R(s,\mathscr{A})\ll|\mathrm{Im}s|^{-\mu},\quad |\mathrm{Im}s|\to+\infty,\quad \mathrm{Re}s=\sigma_1. \tag{30.21}$$

再取 $\sigma_2<\min(\sigma_1,k-1-\alpha)$. 同样由式(30.19)知，对任意正数 $\mu>0$，有

$$\Lambda_R(k-s,\mathscr{B})\ll|\mathrm{Im}s|^{-\mu},\quad |\mathrm{Im}s|\to+\infty,\quad \mathrm{Re}s=\sigma_2. \tag{30.22}$$

由此及式(30.12)推出

$$\Lambda_R(s,\mathscr{A})\ll|\mathrm{Im}s|^{-\mu},\quad |\mathrm{Im}s|\to+\infty,\quad \mathrm{Re}s=\sigma_2. \tag{30.23}$$

注意条件：$\Lambda_R(s,\mathscr{A})+a_0/s+b_0/(k-s)$ 在任一宽度有限的垂直长条上有界，利用函数论中的 Phragmén-Lindelöf 原理(见定理 36.8)由式(30.21)和(30.23)就推出：当 $\sigma_2\leqslant\mathrm{Re}s\leqslant\sigma_1$ 时一致地有

$$\Lambda_R(s,\mathscr{A})\ll|\mathrm{Im}s|^{-\mu},\quad |\mathrm{Im}s|\to+\infty. \tag{30.24}$$

进而取 $\sigma_1>\max(1+\alpha,k)$，$\sigma_2<\min(0,k-1-\alpha)$. 现把式(30.20)中的积分直线取为 $\mathrm{Re}s=\sigma_1$，由式(30.24)知可把积分直线移至 $\mathrm{Re}s=\sigma_2$，在长条 $\sigma_2\leqslant\mathrm{Re}s\leqslant\sigma_1$ 中被积函数 $(\sqrt{R}\,y)^{-s}\Lambda_R(s,\mathscr{A})$ 有两个一级极点：$s=0,k$，留数分别为 $-a_0$，$(\sqrt{R}\,y)^{-k}b_0$，因而得到

$$f(\mathrm{i}y,\mathscr{A})=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{Re}s=\sigma_2}(\sqrt{R}\,y)^{-s}\Lambda_R(s,\mathscr{A})\mathrm{d}s$$

$$+ (\sqrt{R}y)^{-k}b_0, \quad y > 0. \tag{30.25}$$

利用式(30.12)推出

$$f(\mathrm{i}y,\mathscr{A}) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{Re}s=\sigma_2} (\sqrt{R}y)^{-s}\Lambda_R(k-s,\mathscr{B})\mathrm{d}s + (\sqrt{R}y)^{-k}b_0$$

$$= (\sqrt{R}y)^{-k}\left\{b_0 + \int_{\mathrm{Re}s=k-\sigma_2}(\sqrt{R}y)^{s}\Lambda_R(s,\mathscr{B})\mathrm{d}s\right\}, \ y > 0. \tag{30.26}$$

另一方面,对取定的 $\sigma_2(<\min(0,k-1-\alpha))$,取 $\sigma_1=k-\sigma_2$,显见,满足 $\sigma_1>\max(1+\alpha,k)$. 这样,在式(30.20)中,以 $\mathscr{B}$ 代替 $\mathscr{A}$,$(Ry)^{-1}$ 代替 y,并取 $\sigma=k-\sigma_2$,同推导式(30.25)完全一样可得到

$$f(\mathrm{i}/(Ry),\mathscr{B}) = \left\{b_0 + \int_{\mathrm{Re}s=k-\sigma_2}(1/(\sqrt{R}y))^{-s} \cdot \Lambda_R(s,\mathscr{B})\mathrm{d}s\right\}, \quad y > 0. \tag{30.27}$$

由式(30.26)和(30.27)就推出

$$f(\mathrm{i}y,\mathscr{A}) = \mathrm{i}^k(\mathrm{i}\sqrt{R}y)^{-k}f(-1/(\mathrm{i}Ry),\mathscr{B}), \quad y > 0.$$

进而,由解析开拓得

$$f(z,\mathscr{A}) = \mathrm{i}^k(\sqrt{R}z)^{-k}f(-1/(Rz),\mathscr{B}), \quad z \in \boldsymbol{H}.$$

这就是式(30.11). 证毕.

定理 30.1 可表为如下形式(证明留给读者).

定理 30.2 在定理 30.1 的条件和符号下以下两个命题等价:

(a) $f(z,\mathscr{B}) = (z\sqrt{R})^{-k}f(-1/(Rz),\mathscr{A}), \quad z \in \boldsymbol{H}$;

$$\tag{30.28}$$

(b) $\Lambda_R(s,\mathscr{A})$和 $\Lambda_R(s,\mathscr{B})$可解析开拓到整个复平面,且满足函数方程

$$\Lambda_R(s,\mathscr{A}) = \mathrm{i}^k\Lambda_R(k-s,\mathscr{B}), \quad s \in \boldsymbol{C}, \tag{30.29}$$

以及

$$\Lambda_R(s,\mathscr{A}) + a_0/s + \mathrm{i}^k b_0/(k-s) \tag{30.30}$$

在全平面解析,且在任一宽度有限的垂直长条上有界.

特别当 k 是整数,$R=N$ 是正整数时,定理 30.2 的形式便于应用于模形式,因为这时式(30.28)变为

$$f(z,\mathscr{B}) = f(z,\mathscr{A}) \circ [W_{(N)}]_k, \quad z \in \boldsymbol{H}. \qquad (30.28')$$

定理 30.3　设 k,N 是正整数，$f\in S_k(\Gamma_1(N))$. 再设 f 的 Fourier 展式为

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n z} = f(z,\mathscr{A}), \quad z \in \boldsymbol{H},$$

这里 $\mathscr{A}$ 表系数 $\{a_n\}$ 组成的复数列. 我们记

$$\Lambda_N(s,f) = \Lambda_N(s,\mathscr{A}). \qquad (30.31)$$

那么，$\Lambda_N(s,f)$ 可全纯地解析开拓到整个复平面，且满足

$$\Lambda_N(s,f) = \mathrm{i}^k \Lambda_N(k-s, f\circ [W_{(N)}]_k). \qquad (30.32)$$

证　由式(11.42)知，$W_{(N)}^{-1}\Gamma_1(N)W_{(N)}=\Gamma_1(N)$，所以，当 $f\in S_k(\Gamma_1(N))$ 时，$f\circ[W_{(N)}]_k\in S_k(\Gamma_1(N))$. 同样记 $f\circ[W_{(N)}]_k(z)=f(z,\mathscr{B})$，$\mathscr{B}$ 表 $f\circ[W_{(N)}]_k$ 的 Fourier 展式的系数 $\{b_n\}$ 组成的复数列. 由定理 29.5 知数列 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 分别满足条件(30.1)和(30.8)($\alpha=k/2$). 因此，由定理 30.2(注意式(30.28'))就推出所要的结论.

当 $f\in M_k(\Gamma_1(N))$ 时定理 30.3 是否成立呢？从证明可以看出关键是要证明：数列 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 分别满足条件(30.1)和(30.8). 定理 29.5 仅得到了对尖形式的 Fourier 展式的系数有这样的估计. 当 f 不是尖形式时，就要讨论 $\Gamma_1(N)$ 的 Eisenstein 级数，在一般情形这是很复杂的(在 §23 我们讨论了 $\Gamma(N)$ 的 Eisenstein 级数). 可以证明 $\Gamma_1(N)$ 的 Eisenstein 级数的 Fourier 展式的系数同样有式(30.1)这样的估计，所以当 $f\in M_k(\Gamma_1(N))$ 时定理 30.3 是成立的. 这里就不讨论了(见[TM，§4.7]). 当然，$N=1$ 即完全模群的情形是显然成立的(证明留给读者). 证毕.

一个更为复杂更为重要的问题是：定理 30.3 的逆定理是否成立？这是一个仍然没有解决的困难问题. 下节将证明 Weil 的一个结果. 但是，当 $N=1$ 即完全模群的情形回答是肯定的，这就是

定理 30.4　设正整数 $k>1$，$f=f(z,\mathscr{A})$ 由式(30.3)给出. 那么，$f\in M_{2k}(\Gamma)$ 的充要条件是 f 在 $\boldsymbol{H}$ 上解析，满足条件(30.1)，$\Lambda(s,f)=\Lambda_1(s,f)$(见式(30.31))可解析开拓到整个复平面，

$$\Lambda(s,f) + a_0/s + (-1)^k a_0/(k-s) \qquad (30.33)$$

在全平面解析且在任一垂直长条上有界，以及满足函数方程

$$\Lambda(s,f) = (-1)^k \Lambda(2k-s,f). \tag{30.34}$$

此外，当 $a_0=0$ 时，$f\in S_{2k}(\Gamma)$.

因为 Γ 的生成元是 T 和 $S=W_{(1)}$，所以很容易利用定理 30.2 来证明，留给读者.

最后，来举两个例子.

例 30.1 取数列 $\mathscr{A}$ 为：$a_0=1/2, a_n=1, n=m^2(m\geqslant 1)$，及 $a_n=0$，其他. 这样就有

$$f(z,\mathscr{A}) = \frac{1}{2}\theta_2(z) = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi i m^2 z},$$

$$L(s,\mathscr{A}) = \zeta(2s) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2s}}.$$

现取定理 30.1 中的 $k=1/2, R=4$. 由式(20.8)知

$$\mathrm{i}^{1/2}(2z)^{-1/2} f\left(\frac{-1}{4z},\mathscr{A}\right) = \mathrm{i}^{1/2}(2z)^{-1/2}\left(\frac{1}{2}\theta_2\left(\frac{-1}{4z}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\theta_2(z), \quad z\in \boldsymbol{H}.$$

因此，取数列 $\mathscr{B}=\mathscr{A}$，由定理 30.1 立即推出

$$\Lambda_4(s,\mathscr{A}) = \Lambda_4(1/2-s,\mathscr{A}), \quad s\in \boldsymbol{C} \tag{30.35}$$

及

$$\Lambda_4(s,\mathscr{A}) + 1/(2s) + 1/(1-2s) \tag{30.36}$$

在整个 s 平面解析且在任一宽度有限的垂直长条上有界. 式(30.35)就是

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) = \pi^{-(1/2-s)}\Gamma(1/2-s)\zeta(1-2s), \quad s\in \boldsymbol{C}, \tag{30.37}$$

以 $s/2$ 代 s，即得

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s), \quad s\in \boldsymbol{C}, \tag{30.38}$$

这就是著名的 Riemann Zeta 函数的函数方程. 相应地由式(30.36)知，

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) + 1/(2s) + 1/(1-2s), \tag{30.39}$$

或(以 $s/2$ 代 s)

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) + 1/s + 1/(1-s) \tag{30.40}$$

在整个 s 平面解析且在任一宽度有限的长条上有界.

例 30.2　在定理 30.3 中取 $k=12, N=1$，则有

$$f(z,\mathscr{A}) = \Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\mathrm{e}^{2\pi inz} \in S_{12}(\Gamma),$$

及

$$L(s,\mathscr{A}) = L(s,\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}. \qquad (30.41)$$

由定理 30.3 立即推出函数方程

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,\Delta) = (2\pi)^{-(12-s)}\Gamma(12-s)L(12-s,\Delta), \qquad (30.42)$$

且这是一个整函数.

§ 31　Weil 定 理

设 f 在 $\boldsymbol{H}$ 上解析，且有 Fourier 展式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{2\pi inz}, \quad z \in \boldsymbol{H}. \qquad (31.1)$$

再设 ψ 是模 q 的(Dirichlet)特征，我们记

$$f_\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi(n)a_n\mathrm{e}^{2\pi inz}, \quad L(s;f,\psi) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)a_n n^{-s}, \qquad (31.2)$$

以及对正数 R 记

$$\Lambda_R(s;f,\psi) = (2\pi/(q\sqrt{R}))^{-s}\Gamma(s)L(s;f,\psi). \qquad (31.3)$$

我们先来讨论 f_ψ 和 f 的关系，以及当

$$g = f\circ[W_{(N)}]_k \qquad (31.4)$$

时，f_ψ 和 $g_{\bar\psi}$ 的关系. 为此要利用熟知的 Gauss 和

$$G(l,\psi) = \sum_{u \bmod q}\psi(u)\mathrm{e}^{2\pi ilu/q}, \quad l \in \boldsymbol{Z}. \qquad (31.5)$$

特别的，记

$$\tau(\psi) = G(1,\psi). \qquad (31.6)$$

当 ψ 是模 q 的原特征时，我们有(见性质 35.16)

$$G(l,\psi) = \bar\psi(l)\tau(\psi), \quad |\tau(\psi)| = \sqrt{q}. \qquad (31.7)$$

引理 31.1 (i)设 f 在 $\boldsymbol{H}$ 上解析，有 Fourier 展式(31.1). 再设整数 $q>1$，以及 ψ 是模 q 的原特征. 那么，对整数 k 有

$$f_\psi = \tau(\bar{\psi})^{-1} \sum_{u \bmod q} \bar{\psi}(u) f \circ [T^{u/q}]_k, \tag{31.8}$$

这里

$$T^\lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \boldsymbol{R}; \tag{31.9}$$

(ii) 设 $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$，$\chi \bmod N$ 所对应的原特征是 $\chi^* \bmod r$，即 r 是特征 χ 的导子(见性质 35.12)，以及 ψ 是模 q 的原特征. 那么，$f_\psi \in M_k(\Gamma_0(M), \chi\psi^2)$，且当 f 是尖形式时 f_ψ 也是尖形式，其中

$$M = [N, q^2, qr]. \tag{31.10}$$

证 因 ψ 是模 q 的原特征，利用式(31.2)，(31.7)及(31.5)得

$$\begin{aligned} f_\psi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\tau(\bar{\psi}))^{-1} G(n, \bar{\psi}) \mathrm{e}^{2\pi i n z} \\ &= (\tau(\bar{\psi}))^{-1} \sum_{u \bmod q} \bar{\psi}(u) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n (z+u/q)}, \end{aligned}$$

这就证明了式(31.8). 下面来证(ii). 设

$$\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ cM & d \end{bmatrix} \in \Gamma, \tag{31.11}$$

我们有

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) = T^\lambda \alpha T^{-d^2\lambda} &= \begin{bmatrix} a + cM\lambda & -d^2 cM\lambda^2 - d(ad-1)\lambda + b \\ cM & d - cM\lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a + cM\lambda & -d^2 cM\lambda^2 - bcdM\lambda + b \\ cM & d - cM\lambda \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{31.12}$$

因此，当 $[N, q^2] \mid M$ 时，

$$\alpha(u/q) \in \Gamma_0(M) \subseteq \Gamma_0(N), \quad u \in \boldsymbol{Z}, \tag{31.13}$$

以及，当 $[N, q^2, qr] \mid M$ 时，

$$d - cMu/q \equiv d \pmod r, \quad u \in \boldsymbol{Z},$$

因而有

$$\chi(\alpha(u/q)) = \chi(\alpha), \quad u \in \boldsymbol{Z}. \tag{31.14}$$

这样，当 $M = [N, q^2, qr]$ 时，对 $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ 及 $\alpha \in \Gamma_0(M)$ 我们有

$$f\circ[T^{u/q}]_k\circ[\alpha]_k = f\circ[\alpha(u/q)]_k\circ[T^{d^2u/q}]_k$$
$$= \chi(\alpha)f\circ[T^{d^2u/q}]_k,\quad u\in \boldsymbol{Z},$$

这里用到了式(31.12),(31.13)和(31.14). 由此及式(31.8)得到

$$f_\psi\circ[\alpha]_k = \chi(\alpha)(\tau(\bar{\psi}))^{-1}\sum_{u \bmod q}\bar{\psi}(u)f\circ[T^{d^2u/q}]_k,$$

由于$(d,q)=1$,所以 u 和 d^2u 同时遍历模 q 的完全剩余系,故从上式得

$$f_\psi\circ[\alpha]_k = \chi(\alpha)\psi^2(d)(\tau(\bar{\psi}))^{-1}\sum_{u \bmod q}\bar{\psi}(u)f\circ[T^{u/q}]_k.$$

这就证明了 $f_\psi\circ[\alpha]_k\in M_k(\Gamma_0(M),\chi\psi^2)$. 关于尖形式的结论可由性质 15.15 推出(留给读者).

引理 31.2 设 $f\in M_k(\Gamma_0(N),\chi)$,$\psi$ 是模 q 的原特征,以及 g 满足式(31.4). 那么,当$(N,q)=1$ 时有

$$f_\psi\circ[W_{(Nq^2)}]_k = c(\psi)g_{\bar{\psi}},\tag{31.15}$$

这里

$$c(\psi)=c(\psi;N,\chi) = \chi(q)\psi(-N)\tau(\psi)/\tau(\bar{\psi})$$
$$=\chi(q)\psi(N)\tau^2(\psi)/q.\tag{31.16}$$

证 设

$$\sigma(v,q) = \begin{bmatrix} q & -v \\ -uN & n\end{bmatrix}\in\Gamma_0(N),\tag{31.17}$$

由计算得

$$W_{(N)}\sigma(v,q)T^{v/q} = q^{-1}\begin{bmatrix} jqN & -1 \\ Nq^2 & 0\end{bmatrix}= q^{-1}T^{u/q}W_{(Nq^2)}.\tag{31.18}$$

注意到 $f\in M_k(\Gamma_0(N),\chi)$时,$g\in M_k(\Gamma_0(N),\bar{\chi})$,由式(31.8)及上式可得

$$g_{\bar{\psi}}= \tau(\psi)^{-1}\sum_{v \bmod q}\psi(v)g\circ[\sigma^{-1}(v,q)]_k\circ[\sigma(v,q)]_k\circ[T^{v/q}]_k$$
$$=\bar{\chi}(q)\tau(\psi)^{-1}\sum_{v \bmod q}\psi(v)f\circ[T^{u/q}]_k\circ[W_{(Nq^2)}]_k.$$

由式(31.17)知 $\psi(v)=\bar{\psi}(-N)\bar{\psi}(u)$,以及 v 和 u 同时遍历模 q 的既约剩余系,所以

$$g_{\bar{\psi}} = \bar{\chi}(q)\tau(\psi)^{-1}\bar{\psi}(-N)\sum_{u \bmod q}\bar{\psi}(u)f\circ[T^{u/q}]_k\circ[W_{(Nq^2)}]_k.$$

由此及式(31. 8)就证明了式(31. 15)和式(31. 16)的第一式. 式(31. 16)的第二式可由式(31. 7)的第二式推出(留给读者).

引理 31. 3 设 k 是整数,N 是正整数,χ 是模 N 的特征,f 和 g 均满足引理 31. 1 中关于 f 的条件,以及式(31. 4)成立. 再设 q **是奇素数或 4** 且与 N 互素. 如果对模 q 的所有原特征 ψ,f 和 g 满足式(31. 15)和(31. 16),则对任意与 q 互素的整数 s 及 t,我们有

$$\begin{aligned}&\chi(q)g\circ[T^{s/q}]_k - g\circ[\sigma(s,q)T^{s/q}]_k\\ &\quad = \chi(q)g\circ[T^{t/q}]_k - g\circ[\sigma(t,q)T^{t/q}]_k,\end{aligned} \tag{31. 19}$$

即

$$g\circ[(\chi(q)-\sigma(s,q))T^{s/q}]_k = g\circ[(\chi(q)-\sigma(t,q))T^{t/q}]_k, \tag{31. 19'}$$

这里 $\sigma(v,q)$ 由式(31. 17)给出,以及约定

$$g\circ\left[\sum_{j=1}^{K}c_j\alpha_j\right]_k = \sum_{j=1}^{K}c_j g\circ[\alpha_j]_k,\quad c_j\in \boldsymbol{C},\quad \alpha_j\in \mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R}). \tag{31. 20}$$

证 由式(31. 8),式(31. 15)及(31. 16)推出

$$\begin{aligned}&\sum_{u \bmod q}\bar{\psi}(u)f\circ[T^{u/q}]_k\circ[W_{(Nq^2)}]_k = \tau(\bar{\psi})f_\psi\circ[W_{(Nq^2)}]_k\\ &\quad = \tau(\bar{\psi})c(\psi)g_{\bar{\psi}} = \chi(q)\psi(-N)\sum_{u \bmod q}\psi(u)g\circ[T^{u/q}]_k.\end{aligned} \tag{31. 21}$$

对$(u,q)=1$,可取定 v,n 满足式(31. 17),进而由式(31. 4)和(31. 18)得到

$$f\circ[T^{u/q}]_k\circ[W_{(Nq^2)}]_k = g\circ[\sigma(v,q)T^{v/q}]_k. \tag{31. 22}$$

注意到 v 和 u 同时遍历模 q 的既约剩余系,由此及 $\psi(v)=\bar{\psi}(-N)\bar{\psi}(u)$,可把式(31. 21)改写为

$$\sum_{v \bmod q}\psi(v)g\circ[\sigma(v,q)T^{v/q}]_k = \chi(q)\sum_{v \bmod q}\psi(v)g\circ[T^{v/q}]_k, \tag{31. 23}$$

即

$$\sum_{v \bmod q} \psi(v) g \circ [(\chi(q) - \sigma(u,q)) T^{v/q}]_k = 0. \qquad (31.23')$$

注意上式仅对模 q 的原特征 ψ 成立. 对任意与 q 互素的整数 s 及 t，上式两边乘以 $\bar{\psi}(s)-\bar{\psi}(t)$，得到

$$(\bar{\psi}(s) - \bar{\psi}(t)) \sum_{v \bmod q} \psi(v) g \circ [(\chi(q) - \sigma(v,q)) T^{v/q}]_k = 0. \qquad (31.24)$$

由于这里的 q 是奇素数或 4，所以模 q 的特征除了主特征外均为原特征(见性质 35.10)，因而上式对模 q 的所有特征 ψ 都成立. 将式(31.24)对模 q 的所有特征 ψ 求和，利用性质(见性质 35.8)：设 $(a,q)=1$，我们有

$$\sum_{\psi \bmod q} \psi(v) \bar{\psi}(a) = \begin{cases} \varphi(q), & v \equiv a \pmod{q}, \\ 0, & v \not\equiv a \pmod{q}, \end{cases} \qquad (31.25)$$

即得所要的结论.

引理 31.4　设 k,N,χ,f 和 g 同引理 31.3，以及 m,n 是奇素数或 4 且均与 N 互素. 如果对模 $q=m$ 或 n 的所有 Dirichlet 原特征 ψ，f 和 g 满足式(31.15)和(31.16)，则对任意的

$$\gamma = \begin{bmatrix} m & -v \\ -uN & n \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N), \qquad (31.26)$$

有 $g \circ [\gamma]_k = \bar{\chi}(\gamma) g$.

证　设

$$\gamma' = \begin{bmatrix} m & v \\ uN & n \end{bmatrix}.$$

在式(31.19')中取 $q=m,s=v,t=-v$，即

$$\sigma(v,m) = \gamma, \quad \sigma(-v,m) = \gamma',$$

得到

$$g \circ [(\chi(m) - \gamma) T^{v/m}]_k = g \circ [(\chi(m) - \gamma') T^{-v/m}]_k,$$

即

$$g \circ [\chi(m) - \gamma]_k = g \circ [(\chi(m) - \gamma') T^{-2v/m}]_k. \qquad (31.27)$$

同样可在式(31.19')中取 $q=n,s=v,t=-v$，即

$$\sigma(v,n) = (\gamma')^{-1}, \quad \sigma(-v,n) = \gamma^{-1},$$

得到

$$g \circ [\chi(n) - (\gamma')^{-1}]_k = g \circ [(\chi(n) - \gamma^{-1})T^{-2v/n}]_k. \tag{31.28}$$

由于 $\chi(m)\chi(n)=1$，所以有

$$\chi(n) - (\gamma')^{-1} = -\chi(n)(\chi(m) - \gamma')(\gamma')^{-1},$$

$$(\chi(n) - \gamma^{-1})T^{-2u/n} = -\chi(n)(\chi(m) - \gamma)\gamma^{-1}T^{-2v/n}.$$

把以上两式代入式(31.28)得到

$$g \circ [\chi(m) - \gamma']_k = g \circ [(\chi(m) - \gamma)\gamma^{-1}T^{-2v/n}\gamma']_k. \tag{31.29}$$

由此及式(31.27)得

$$G = g \circ [\chi(m) - \gamma]_k = g \circ [\chi(m) - \gamma]_k \circ [\beta]_k = G \circ [\beta]_k, \tag{31.30}$$

其中

$$\beta = \gamma^{-1}T^{-2v/n}\gamma' T^{-2v/m} = \begin{bmatrix} 1 & -2v/m \\ 2uN/n & 4/(mn) - 3 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Q}). \tag{31.31}$$

由 m,n 的取值条件知，矩阵 β 的迹的绝对值

$$|\mathrm{tr}\beta| = |4/(mn) - 2| < 2, \quad 且 \neq 0,1. \tag{31.32}$$

因此，由定义 8.4 知，它是椭圆元，且由式(8.7)～(8.12)的讨论知：(i) 它有两个互为共轭的复特征根 λ 和 $\bar{\lambda}$，$|\lambda|=1$，且由式 (31.32) 知，λ 不是单位根(为什么)；(ii) 相应的有两个互为共轭的复不动点 z_0 和 $\bar{z}_0$，假定 $\bar{z}_0 \in \boldsymbol{H}$；以及(iii)

$$\beta \begin{bmatrix} -z_0 & \bar{z}_0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_0 & \bar{z}_0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}.$$

由上式得

$$\sigma\beta\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \tag{31.33}$$

其中

$$\sigma = \frac{1}{\bar{z}_0 - z_0}\begin{bmatrix} 1 & -\bar{z}_0 \\ 1 & -z_0 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{C}). \tag{31.34}$$

由于 σ 是二阶非退化的复数矩阵，为了进一步讨论就需要把权为 k

的 α 变换推广到 $\alpha\in\mathrm{GL}(\boldsymbol{C})$，$|\alpha|\neq0$ 的情形，这里惟一的不同是函数的定义域. 为此引进

定义 31.1　设 h 是定义在集合 $\mathscr{D}\subseteq\boldsymbol{C}$ 上的函数，$\alpha\in\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{C})$，$|\alpha|\neq0$，以及 k 是整数. 定义集合 $\alpha^{-1}(\mathscr{D})\subseteq\boldsymbol{C}$ 上的函数 $H=h\circ[\alpha]_k$ 为

$$H(w)=j(w,\alpha)^{-k}h(\alpha(w)),\tag{31.35}$$

$j(w,\alpha)$ 由式(15.2)给出. 我们也称 $h\circ[\alpha]_k$ 是 h **的权为 k 的 α 变换**.

显见，式(15.4)在这里也成立，所以性质 15.2 也成立. 但这里要注意的是函数的定义域. 设 $\alpha,\beta\in\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{C})$，$|\alpha\beta|\neq0$.

$$H_1(x)=h\circ[\alpha\beta]_k(x)=j(x,\alpha\beta)h(\alpha\beta(x)),\quad x\in(\alpha\beta)^{-1}(\mathscr{D}),$$

以及由式(31.35)知

$$\begin{aligned}H_2(y)&=(h\circ[\alpha]_k)\circ[\beta]_k(y)=(H\circ[\beta]_k)(y)\\&=j(y,\beta)^{-k}H(\beta(y))\\&=j(y,\beta)^{-k}j(\beta(y),\alpha)^{-k}h(\alpha\beta(y)),\ y\in\beta^{-1}(\alpha^{-1}\mathscr{D}).\end{aligned}$$

由以上两式及式(15.4)就推出

$$h\circ[\alpha\beta]_k=(h\circ[\alpha]_k)\circ[\beta]_k.\tag{31.36}$$

由此及式(31.33)，(31.30)推出

$$G\circ[\sigma^{-1}]_k=G\circ[\sigma^{-1}]_k\circ[\sigma\beta\sigma^{-1}]_k=\lambda^kG\circ[\sigma^{-1}].\tag{31.37}$$

由定义知函数 $G\circ[\sigma^{-1}]_k$ 的定义域是 $w\in\sigma(\boldsymbol{H})$，由于 $\bar{z}_0\in\boldsymbol{H}$，所以就是 $0<|w|<1$. 设 $G\circ[\sigma^{-1}]_k$ 在 $w=0$ 的 Laurent 展式是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nw^n,$$

式(31.37)就是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(1-\lambda^k)c_nw^n,\quad 0<|w|<1.$$

因为 λ 不是单位根，所以 $c_n=0$，$-\infty<n<\infty$，即 $G\equiv0$. 这就证明了引理 31.4 的结论.

定理 31.5　设 f 和 g 均满足引理 31.1 中关于 f 的条件及条件(29.3). 再设 N 是正整数，ψ 是模 $q(>1)$的原特征. 那么，以下两个条件等价：

(a) $f_\psi\circ[W_{(Nm^2)}]_k=C(\psi)g_{\bar{\psi}}$；　　　　(31.38)

(b) $\Lambda_N(s;f,\psi)$可全纯地解析开拓到整个复平面，在任一垂直长条上有界，且满足函数方程

$$\Lambda_N(s;,f,\psi) = \mathrm{i}^k C(\psi)\Lambda_N(k-s;g,\bar{\psi}), \qquad (31.39)$$

这里 $C(\psi)$为一常数.

证 在定理 30.2 中以 $Nm^2, f_\psi, C(\psi)g_{\bar{\psi}}$分别代替 $R, f(z,\mathscr{A})$, $f(z,\mathscr{B})$，并注意到 $\psi(0)=0$，及

$$\begin{aligned} L(s;f_\psi) &= L(s;f,\psi), \\ \Lambda_{Nm^2}(s;f_\psi) &= \Lambda_N(s;f,\psi), \end{aligned} \qquad (31.40)$$

由定理 30.2 立即推出所要结论.

由定理 31.5 及引理 31.2 就得到定理 30.3 的推广.

定理 31.6 设 $f\in S_k(\Gamma_0(N),\chi)$，$\psi$ 是模 q 的原特征. 那么，当 $(N,q)=1$ 时，$\Lambda_N(s;f,\psi)$可全纯地解析开拓到整个复平面，在任一垂直长条上有界，且满足函数方程

$$\Lambda_N(s;f,\psi) = \mathrm{i}^k c(\psi)\Lambda_N(k-s;f\circ[W_{(N)}]_k,\bar{\psi}), \quad (31.41)$$

这里的 $c(\psi)$由式(31.16)给出.

下面来证明本节的主要结论，即定理 31.6 的逆定理. 为此要引进一类集合. 设 N 是正整数，以 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(N)$表示满足以下条件的整数集合：

(i) 它的元素为奇素数或 4，且均与 N 互素；

(ii) 对任意互素的正整数 a,b，$\mathfrak{M}$ 与同余类 $a \bmod b$ 的交非空. (31.42)

这样的集合是存在的，例如，由算术级数中的素数定理知，由全体与 N 互素的奇素数组成的集合就满足条件.

定理 31.7(Weil) 设 k,N 是正整数，χ 是模 N 的特征，$\chi(-1)=(-1)^k$. 再设复数列 $\mathscr{A}=\{a_n\}$和 $\mathscr{B}=\{b_n\}$分别满足条件(30.1)和(30.8). $f(z)=f(z,\mathscr{A})$，$g(z)=f(z,\mathscr{B})$由式(30.3)确定. 那么，若满足以下两个条件：

(a) $\Lambda_N(s;\mathscr{A})$和 $\Lambda_N(s;\mathscr{B})$满足定理 30.2 的条件；

(b) 设集合 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(N)$满足条件(31.42). 对任意的 $q\in\mathfrak{M}$ 及模 q 的任意的原特征 ψ，$\Lambda_N(s;f,\psi)$和 $\Lambda_N(s;g,\psi)$满足定理 31.5 的条件(b)(其中 $C(\psi)$等于式(31.16)中的 $c(\psi)$)，则有

$$g = f \circ [W_{(N)}]_k, \tag{31.43}$$

及 $$g \in M_k(\Gamma_0(N), \bar{\chi}), \quad f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi). \tag{31.44}$$

此外,若 $L(s;\mathscr{A})$对某个 $s=k-\delta(\delta>0)$绝对收敛,那么,f 和 g 都是尖形式.

证 由条件(a)及定理 30.2($R=N$)知式(31.43)成立. 我们先来证明:对任意的

$$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ cN & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N),$$

有 $g \circ [\sigma]_k = \bar{\chi}(\sigma) g$. 若 $c=0$,则 $a=d=\pm 1$. 由条件 $\chi(-1)=(-1)^k$,就推得

$$g \circ [\sigma]_k = d^{-k} g = \bar{\chi}(d) g = \bar{\chi}(\sigma) g.$$

若 $c \neq 0$,由$(a,cN)=(d,cN)=1$ 知,必有整数 s,t 使得 $m=a+tcN$ 及 $n=d+scN$ 都是素数,且 $m,n \in \mathfrak{M}$. 取

$$u = -c, \quad v = -(b + sm + stun + nt),$$

就有

$$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ cN & d \end{bmatrix} = T^{-t} \begin{bmatrix} m & -v \\ -uN & n \end{bmatrix} T^{-s}.$$

由复数列 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 分别满足条件(30.1)和(30.8),从定理 29.2 就推出 f 和 g 都满足条件(29.3)($\mu=\alpha+1$),进而由条件(b)及定理 31.5 知,对任意的 $q \in \mathfrak{M} = \mathfrak{M}(N)$及模 q 的任意的原特征 ψ,f 和 g 满足式(31.15)和(31.16). 所以,由引理 31.4 亦推出

$$g \circ [\sigma]_k = \bar{\chi}(n) g = \bar{\chi}(d) g = \bar{\chi}(\sigma) g.$$

利用定理 29.3 就证明了 $g \in M_k(\Gamma_0(N), \bar{\chi})$. 进而由性质 15.18 推出 $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$. 证毕.

最后来证明关于尖形式的结论. 设

$$c_0 = 0, \quad c_n = \sum_{j=1}^{n} |a_j|, \quad n \geqslant 1.$$

由 $L(s,\mathscr{A})$对 $s=k-\delta(\delta>0)$绝对收敛推出 $c_n \ll n^{k-\delta}$,进而由定理 29.2 得到:级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-2\pi n y}$当 $y>0$ 时收敛,且

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-2\pi n y} \ll y^{-k+\delta-1}, \quad y \to 0.$$

进而推出

$$|f(z) - a_0| \leqslant (1 - e^{-2\pi y}) \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-2\pi n y} \ll y^{-k+\delta}, \quad y \to 0.$$

利用定理 29.3，由此就证明了 f 是尖形式，因而 g 也是尖形式.

问　　题

1. 本题是利用定理 30.1 的方法来证明 $\eta(z)$ 所满足的函数方程 (6.11).

(i) 设 $f(z,\mathscr{A})=f(z)=\frac{\pi i z}{12}-\log\eta(z)$. 证明：

$$L(s,\mathscr{A}) = \zeta(s)\zeta(s+1);$$

(ii) 证明：$\Lambda_1(s,\mathscr{A})=\Lambda_1(-s,\mathscr{A})$，且

$$\Lambda_1(s,\mathscr{A}) - \frac{\pi}{12(s-1)} + \frac{\pi}{12(s+1)} + \frac{1}{2s^2}$$

是整函数，在任一垂直长条上有界 (利用 $\zeta(-1)=-1/12$)；

(iii) 证明：$f(iy)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}s=2} y^{-s}\Lambda_1(s,\mathscr{A})ds$. 进而，把积分移至 $\mathrm{Re}s=-2$，证明：

$$f(iy) = f\left(\frac{-1}{iy}\right) + \frac{\pi}{12y} + \frac{1}{2}\log y - \frac{\pi y}{12};$$

(iv) 证明式(6.11).

2. 写出定理 30.4 的证明.

3. (i) 设 $k\geqslant 1$，$f(z,\mathscr{A})=f(z)=-\frac{B_{2k}}{4k}E_{2k}(z)$. 利用 $\zeta(s)$ 来表示 $L(s,\mathscr{A})$，并求它的 Euler 乘积.

(ii) 设 $f(z,\mathscr{A}_\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\sigma_{2k-1}(n)e^{2\pi i n z}$，$\chi \bmod N$. 求 $L(s,\mathscr{A}_\chi)$ 的 Euler 乘积.

(iii) 把定理 30.4 应用于 $f(z)$ ($k\geqslant 2$)，验证定理的结论，取 $k=2,3,4,5$.

第十一章 两个应用

本章给出了模形式理论在数论上的两个重要经典应用：§32 的平方和问题，及§33 的无限制整数分拆问题.

§32 平方和问题

设 s 是给定的正整数，整数 $n\geqslant 0$. 求解不定方程

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_s^2=n,\quad x_j\in\mathbf{Z},\quad 1\leqslant j\leqslant s,\qquad (32.1)$$

就是著名的平方和问题. 以 $R(n,s)$ 表不定方程(32.1)的解 $\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$ 的个数(次序或正负号不同看做是不同的解). 当 $s=4k$ 时，利用模形式理论可求出 $R(n,4k)$ 的渐近公式. 这就是本节要证明的结论. 关于这问题的研究可参看[RG]和[EG].

利用 Theta 函数 $\theta_1(w)$(见式(4.19))，可得

$$\{\theta_1(w)\}^s=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R(n,s)e^{\pi in^2w},\quad w\in\boldsymbol{H}.\qquad (32.2)$$

我们来证明

定理 32.1 我们有

$$R(n,4k)=(2^{2k}-1)^{-1}(4k/B_{2k})\Big\{(-1)^{k-1}\sum_{\substack{l\mid n\\ n/l\equiv 1(2)}}l^{2k-1}-\sum_{2l\mid n}(-1)^l l^{2k-1}\Big\}+O(n^k).\qquad (32.3)$$

特别的，

$$R(n,4)=\begin{cases}8\sigma(n), & 2\nmid n,\\ 24\sigma(m), & n=2^rm,\ r\geqslant 1,\ 2\nmid m.\end{cases}\qquad (32.4)$$

$$R(n,8)=16\sum_{l\mid n}(-1)^{n-1}l^3.\qquad (32.5)$$

证 由例 20.1 知，$\theta_1^4(w)\in M_2(\Gamma(2))$，因而有 $\theta_1^{4k}(w)\in$

$M_{2k}(\Gamma(2))$，以及在 $\Gamma(2)$ 的三个不等价的尖点 $\infty=1/0, 0=0/(-1)$，$-1=1/(-1)$ 处的值为

$$\theta_1^{4k}(\infty)=1,\quad \theta_1^{4k}(0)=(-1)^k,\quad \theta_1^{4k}(-1)=0. \tag{32.6}$$

由式(22.55)，(22.2)和(23.15)知

$$\begin{aligned} E_{2k}(z;\Gamma(2)) &= 1+\sum_{2|c>0}\sum_{(c,d)=1}\frac{1}{(cz+d)^{2k}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{c\equiv 0(2)}\sum_{(c,d)=1,d\equiv 1(2)}\frac{1}{(cz+d)^{2k}} \\ &= \frac{1}{2}E_{2k}(z;0,1,2)=\frac{1}{2}E_{2k}^{(0,1)}(z;\Gamma(2)), \end{aligned}$$

因而，在 $\Gamma(2)$ 的三个不等价的尖点 $\infty=1/0, 0=0/(-1), -1=1/(-1)$ 处，相应的标准 Eisenstein 级数是(为什么)：

$$E_{2k}^{(\infty)}(z;\Gamma(2))=E_{2k}(z;\Gamma(2))=(1/2)E_{2k}(z;0,1,2), \tag{32.7}$$

$$E_{2k}^{(0)}(z;\Gamma(2))=(1/2)E_{2k}(z;1,0,2), \tag{32.8}$$

$$E_{2k}^{(-1)}(z;\Gamma(2))=(1/2)E_{2k}(z;1,1,2). \tag{32.9}$$

由此及式(32.6)得

$$\theta_1^{4k}(w)-E_{2k}^{(\infty)}(z;\Gamma(2))-(-1)^kE_{2k}^{(0)}(z;\Gamma(2))\in S_{2k}(\Gamma(2)). \tag{32.10}$$

由定理 23.3 知，当 $(u,v,N)=1$ 时，我们有

$$E_{2k}(z;u,v,2)=(\zeta(2k)(1-2^{-2k}))^{-1}G_{2k}(z;,u,v,2).$$

因此，进而由定理 23.7 得到

$$\begin{aligned} E_{2k}^{(\infty)}(z;\Gamma(2)) &= (1/2)E_{2k}(z;0,1,2) \\ &= 1+(\zeta(2k)(1-2^{-2k}))^{-1}a(2k)2^{-2k} \\ &\quad\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{2l|n}(-1)^l l^{2k-1}\Big)\mathrm{e}_2(nz), \end{aligned} \tag{32.11}$$

$$\begin{aligned} E_{2k}^{(0)}(z;\Gamma(2)) &= (1/2)E_{2k}(z;1,0,2) \\ &= (\zeta(2k)(1-2^{-2k}))^{-1}a(2k)2^{-2k} \\ &\quad\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{l|n\\ n/l\equiv 1(2)}}l^{2k-1}\Big)\mathrm{e}_2(nz), \end{aligned} \tag{32.12}$$

及

$$E_{2k}^{(-1)}(z;\Gamma(2)) = (1/2)E_{2k}(z;1,1,2)$$
$$= (\zeta(2k)(1-2^{-2k}))^{-1}a(2k)2^{-2k}$$
$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{l\mid n\\ n/l\equiv 1(2)}}(-1)^l l^{2k-1}\Big)e_2(nz). \quad (32.13)$$

这样，利用定理 29.5，由式(32.10)，(32.11)和(32.12)推出

$$R(n,4k) - (\zeta(2k)(1-2^{-2k}))^{-1}a(2k)2^{-2k}\Big\{\sum_{2l\mid n}(-1)^l l^{2k-1}$$
$$+ (-1)^k \sum_{\substack{l\mid n\\ n/l\equiv 1(2)}} l^{2k-1}\Big\} = O(n^k).$$

利用式(5.42)，由上式就得到式(32.3). 由定理 19.4(i)知，

$$\dim S_{2k}(\Gamma(2)) = 0, \quad k = 1,2.$$

所以有

$$R(n,4) = 8\Big\{\sum_{\substack{l\mid n\\ n/l\equiv 1(2)}} l - \sum_{2l\mid n}(-1)^l l\Big\}, \quad (32.14)$$

及

$$R(n,8) = 16\Big\{\sum_{\substack{l\mid n\\ n/l\equiv 1(2)}} l^3 + \sum_{2l\mid n}(-1)^l l^3\Big\}. \quad (32.15)$$

由式(32.14)立即推出式(32.4)的第一式. 当 $r\geqslant 1$ 时，我们有

$$\sum_{\substack{l\mid n\\ n/l\equiv 1(2)}} l - \sum_{2l\mid n}(-1)^l l = 2^r\sigma(m) - \{2^{r-1}\sigma(m) + 2^{r-2}\sigma(m)$$
$$+ \cdots + 2\sigma(m) - \sigma(m)\}$$
$$= 3\sigma(m),$$

由此及式(32.14)就推出式(32.4)的第二式. 当 $2\nmid n$ 时，由式(32.15)得

$$R(n,8) = 16\sigma_3(n) = 16\sum_{l\mid n}(-1)^{n-1}l^3;$$

当 $n=2^r m, r\geqslant 1, 2\nmid m$ 时，由式(32.15)得

$$R(n,8) = 16\{2^{3r}\sigma_3(m) + 2^{3(r-1)}\sigma_3(m) + 2^{3(r-2)}\sigma_3(m)$$
$$+ \cdots + 2^3\sigma_3(m) - \sigma_3(m)\}$$
$$= 16\sum_{l\mid n}(-1)^{n-l}l^3.$$

由以上两式就推出式(32.5).证毕.

§ 33　无限制整数分拆

设 n 是正整数.把 n 表为不计次序的若干个正整数之和的一种表示法称为是 n 的一个分拆：

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s,\quad n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_s > 0. \tag{33.1}$$

对被加项 n_j 及项数 s 加上一定的限制条件就可得到不同类型的分拆.不加任何限制条件的分拆,称为无限制分拆.n 的所有不同的无限制分拆的个数记作 $p(n)$,称为无限制分拆函数.例如,$p(5)=7$,因为

$$\begin{aligned}5 &= 5\\ &= 4+1\\ &= 3+2\\ &= 3+1+1\\ &= 2+2+1\\ &= 2+1+1+1\\ &= 1+1+1+1+1;\end{aligned}$$

$p(6)=11$,因为

$$\begin{aligned}6 &= 6\\ &= 5+1\\ &= 4+2\\ &= 4+1+1\\ &= 3+3\\ &= 3+2+1\\ &= 3+1+1+1\\ &= 2+2+2\\ &= 2+2+1+1\\ &= 2+1+1+1+1\\ &= 1+1+1+1+1+1.\end{aligned}$$

整数分拆是堆垒数论中的一个基本问题,无限制整数分拆是它

的最重要的内容之一.最早应用解析方法研究无限制整数分拆的是Euler,他引进了以无限制分拆函数 $p(n)$ 为系数的幂级数母函数：

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)z^n, \tag{33.2}$$

这里约定 $p(0)=1$. 利用它 Euler 证明了整数分拆理论中著名的五角数定理(见[HL,第八章 §3 定理 3]). 容易证明母函数 $P(z)$ 和 Dedekind η 函数有密切联系(见定理 33.1),因此可以利用模形式理论来研究无限制整数分拆函数 $p(n)$ 的性质,本节就是要利用这一方法来给出 $p(n)$ 的最简单的渐近公式.

定理 33.1 当 $|z|<1$ 时,幂级数(33.2)收敛,且有

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)z^n=\prod_{r=1}^{\infty}(1-z^r)^{-1}, \tag{33.3}$$

以及

$$e^{-2\pi i\tau/24}P(e^{2\pi i\tau})=\eta^{-1}(\tau),\quad \tau\in \boldsymbol{H}. \tag{33.4}$$

证 设 m 是给定的正整数,考虑被加项 $n_j\leqslant m$ 的有限制分拆(33.1),n 的所有这种不同的分拆个数记作 $p_m(n)$,并约定 $p_m(0)=0$. 显然有

$$p_m(n)\leqslant p(n);\quad p_m(n)=p(n),\quad n\leqslant m. \tag{33.5}$$

容易看出,$p_m(n)$ 等于不定方程

$$1\cdot x_1+2\cdot x_2+\cdots+m\cdot x_m=n$$

的非负解的个数. 因此,$p_m(n)$ 的母函数

$$P_m(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_m(n)z^n=\Big(\sum_{x_1=0}^{\infty}z^{x_1}\Big)\Big(\sum_{x_2=0}^{\infty}z^{2x_2}\Big)\cdots\Big(\sum_{x_m=0}^{\infty}z^{mx_m}\Big)$$

$$=\prod_{r=1}^{m}(1-z^r)^{-1}. \tag{33.6}$$

式(33.3)中的无穷乘积当 $|z|<1$ 时是绝对收敛的,所以由解析开拓原理知,只要证明：当 $0\leqslant z<1$ 时,有

$$\lim_{m\to\infty}P_m(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)z^n. \tag{33.7}$$

由式(33.5)及(33.6)知,当 $0\leqslant z<1$ 时,

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-z^r)^{-1}\geqslant P_m(z)=\sum_{n=0}^{m}p_m(n)z^n+\sum_{n>m}p_m(n)z^n$$

$$\geqslant \sum_{n=0}^{m} p(n) z^n.$$

由此推出,形式幂级数(33.2)当 $0 \leqslant z < 1$ 时收敛,且有

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n \leqslant \prod_{r=1}^{\infty} (1 - z^r)^{-1}, \quad 0 \leqslant z < 1.$$

另一方面,对任意固定的 z_0, $0 \leqslant z_0 < 1$,由

$$P_m(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_m(n) z_0^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z_0^n$$

知,上式左边的级数对 m 一致收敛.因而有

$$\prod_{r=1}^{\infty} (1 - z_0^r)^{-1} = \lim_{m \to \infty} P_m(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lim_{m \to \infty} p_m(n)) z_0^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z_0^n, \quad 0 \leqslant z_0 < 1.$$

这就证明了式(33.3).由此及式(6.8)就推出式(33.4).证毕.

设 $0 < d < 1$, $R = R(d)$ 是复平面上以原点为心,以 d 为半径的正向圆周,由复分析的 Cauchy 积分定理知

$$p(n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_R P(z) z^{-n-1} \mathrm{d}z, \quad n \geqslant 0. \qquad (33.8)$$

作复变量替换 $z = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}$,利用式(33.4)得到

$$p(n) = \int_L P(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n\tau} \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_L \eta^{-1}(\tau) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(n-1/24)\tau} \mathrm{d}\tau, \qquad (33.9)$$

其中积分线路 L 是上半平面 $\boldsymbol{H}$ 中的直线段:

L: $\tau = u + \mathrm{i}v, \quad -1/2 \leqslant u < 1/2, \quad v = (2\pi)^{-1} \log(d^{-1}).$

这样,我们就可以利用 η 函数的性质(见定理 6.2,式(15.77))来研究 $p(n)$.本节将利用定理 6.2,证明式(33.9)中的积分的主要部分是在 $u=0$ 附近的一小段上,而其余部分上的积分是可以忽略的次要项.

设 n 充分大,记 $m = n - 1/24$.现取

$$\varepsilon = (96m)^{-1/2} \quad 及 \quad (2\pi)^{-1} \log(d^{-1}) = \varepsilon, \qquad (33.10)$$

并把 L 分为三段:L_1: $-1/2 \leqslant u < -\sqrt{2\varepsilon}$, $v = \varepsilon$; L_2: $-\sqrt{2\varepsilon} \leqslant u <$

$\sqrt{2\varepsilon}, v=\varepsilon$；及 L_3：$\sqrt{2\varepsilon}\leqslant u<1/2, v=\varepsilon$. 这样，就有

$$p(n)=\left\{\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}\right\}\eta^{-1}(\tau)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}m\tau}\mathrm{d}\tau. \qquad (33.11)$$

我们来证明 $p(n)$ 有以下的渐近公式.

定理 33.2 设 $\lambda=\sqrt{2/3}\pi, m=n-1/24$. 我们有

$$p(n)=\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{\mathrm{e}^{\lambda\sqrt{m}}}{m}(1+O(m^{-1/2})), \qquad (33.12)$$

即

$$p(n)=\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{\mathrm{e}^{\lambda\sqrt{n}}}{n}(1+O(n^{-1/2})). \qquad (33.12')$$

先来证明两个引理.

引理 33.3 设 $\tau=u+\mathrm{i}v\in\boldsymbol{H}$. 那么，一定存在模变换 $\alpha\in\dot{\Gamma}$ 使得

$$\mathrm{Im}\alpha(\tau)\geqslant\mathrm{Im}\tau,\quad \mathrm{Im}\alpha(\tau)\geqslant\sqrt{3}/2.$$

证 对任一模变换 $\sigma\in\Gamma$，

$$\tau'=u'+\mathrm{i}v'=\sigma(\tau)=\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\quad \tau\in\boldsymbol{H},$$

我们有

$$\frac{1}{v'}=\frac{(cu+d)^2}{v}+c^2v,\quad v>0. \qquad (33.13)$$

考虑由所有互素整数对 $\{c,d\}$ 组成的集合 $\mathscr{D}$. 由于 $|c|+|d|$ 无论以何种方式趋于 $+\infty$ 时，上式右边也趋于 $+\infty$，所以，上式右边必在某几组数对上取到最小值，即虚部 v' 最大，设 $\{c_1,d_1\}$ 就是这样的一对. 现取

$$\alpha=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix}\in\Gamma. \qquad (33.14)$$

我们要证明这样的 α 就满足引理的要求. 由最小性知 $\mathrm{Im}\alpha(\tau)\geqslant\mathrm{Im}\tau$（为什么）. 下面来证 $\mathrm{Im}\alpha(\tau)\geqslant\sqrt{3}/2$.

设 $\alpha(\tau)=\tau_1=u_1+\mathrm{i}v_1$. 对任一 $\gamma=\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix}\in\Gamma$，设

$$\tau_2=u_2+\mathrm{i}v_2=\gamma(\tau_1)=\gamma\alpha(\tau).$$

由式(33.13)知

$$\frac{1}{v_2}=\frac{(c_2u_1+d_2)^2}{v_1}+c_2^2v_1.$$

由 τ_1 虚部的最小性知，$v_1 \geqslant v_2$. 现取 $c_2=1$，及 d_2 满足 $-1/2 \leqslant u_1+d_2 < 1/2$，从上式就得到

$$\frac{1}{v_1}\leqslant\frac{1}{v_2}=\frac{(u_1+d_2)^2}{v_1}+v_1\leqslant\frac{1}{4v_1}+v_1.$$

由此得 $v_1=\mathrm{Im}\,\alpha(\tau)\geqslant\sqrt{3}/2$.

引理 33.4　设 a,b 是正数，正向围道 D 由 D_1,D_2,D_3 组成：

$$D_1:\ w=re^{i\theta},\quad 0<r\leqslant\sqrt{b/a},\quad \theta=-2\pi;$$

$$D_2:\ w=\sqrt{b/a}e^{i\theta},\quad -2\pi\leqslant\theta\leqslant 0;$$

$$D_3:\ w=re^{i\theta},\quad \sqrt{b/a}\geqslant r>0,\quad \theta=0.$$

我们有

$$J(a,b)=\int_D w^{-1/2}\exp(-aw-bw^{-1})\mathrm{d}w$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{a}}(e^{2\sqrt{ab}}-e^{-2\sqrt{ab}}).$$

证　我们有

$$2w^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\{((aw)^{1/2}+(w/b)^{-1/2})$$

$$-(-(aw)^{1/2}+(w/b)^{-1/2})\}.$$

令　$s=(aw)^{1/2}+(w/b)^{-1/2}$，　$z=-(aw)^{1/2}+(w/b)^{-1/2}$，

上式两边对 w 求导，得到

$$w^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}w}-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right).$$

进而有

$$J(a,b)=\int_D\exp(-aw-bw^{-1})\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}w}-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)\mathrm{d}w$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_D\exp(-s^2+2\sqrt{ab})\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}w}\mathrm{d}w$$

$$-\frac{1}{\sqrt{a}}\int_D\exp(-z^2-2\sqrt{ab})\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\mathrm{d}w$$

$$=J_1(a,b)-J_2(a,b).$$

为了计算 $J_1(a,b)$，作复变数替换 $s=(aw)^{1/2}+(w/b)^{-1/2}$，它把

$$D_1\to C_1:\ -\infty<\mathrm{Re}s\leqslant -2(ab)^{1/4},\quad \mathrm{Im}s=0;$$

$$D_2\to C_2:\ -2(ab)^{1/4}\leqslant \mathrm{Re}s\leqslant 2(ab)^{1/4},\quad \mathrm{Im}s=0;$$

$$D_3\to C_3:\ 2(ab)^{1/4}\leqslant \mathrm{Re}s<+\infty,\quad \mathrm{Im}s=0.$$

因此有

$$J_1(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{e}^{2\sqrt{ab}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{2\sqrt{ab}}.$$

这里用到了式(36.3). 为计算 $J_2(a,b)$，作复变数替换 $z=-(aw)^{1/2}+(w/b)^{-1/2}$，它把

$$D_1\to E_1:\ -\infty<\mathrm{Re}z\leqslant 0,\quad \mathrm{Im}z=0;$$

$$D_2\to E_2:\ 0\geqslant \mathrm{Im}z\geqslant -2(ab)^{1/4},\quad \mathrm{Re}z=0,\quad \text{及}$$

$$-2(ab)^{1/4}\leqslant \mathrm{Im}z\leqslant 0,\quad \mathrm{Re}z=0;$$

$$D_3\to E_3:\ 0\leqslant \mathrm{Re}z<+\infty,\quad \mathrm{Im}z=0.$$

因此有

$$J_2(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{e}^{-2\sqrt{ab}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-2\sqrt{ab}}.$$

综合以上各式就证明了所要的结论.

定理 33.2 的证明 先来证明有估计

$$\int_{L_j}\eta^{-1}(\tau)\mathrm{e}^{-2\pi i m\tau}\mathrm{d}\tau\ll \mathrm{e}^{\lambda\sqrt{m}/2},\quad j=1,3. \tag{33.15}$$

只要证明 $j=1$ 的情形，另一情形可同样推出. 对任一 $\tau=u+iv$，由引理 33.3 知存在由式(33.14)给出的 α，使 $\tau_1=u_1+iv_1=\alpha(\tau)$ 满足 $v_1\geqslant v$，$v_1\geqslant\sqrt{3}/2$. 因而有

$$|c_1\tau+d_1|^2=v/v_1\leqslant 1.$$

由此及式(15.7)可得

$$\begin{aligned}|\eta^{24}(\tau)|&=|\eta^{24}\circ[\alpha]_{12}(\tau)|\\&=|(c_1\tau+d_1)^{-12}\eta^{24}(\alpha(\tau))|\\&\geqslant|\eta^{24}(\tau_1)|,\end{aligned}$$

即(利用 $v_1\geqslant\sqrt{3}/2$)

$$|\eta^{-1}(\tau)|\leqslant|\eta^{-1}(\tau_1)|=|e^{-2\pi i\tau_1/24}\prod_{r=1}^{\infty}(1-e^{2\pi ir\tau_1})^{-1}|$$

$$\leqslant e^{\pi v_1/12}\prod_{r=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi rv_1})^{-1}$$

$$\ll e^{\pi v_1/12}. \tag{33.16}$$

现在我们要证明：当 $\tau=u+iv\in L_1$ 时必有

$$v_1\leqslant(4\varepsilon)^{-1}. \tag{33.17}$$

这时 $v=\varepsilon$，所以由式(33.13)(取 $\sigma=\alpha$)得

$$\frac{1}{v_1}=\frac{(c_1u+d_1)^2}{\varepsilon}+c_1^2\varepsilon. \tag{33.18}$$

我们来证明：这时所取的 α 必有 $|c_1|\geqslant2$. 由此及上式就推出式(33.17). 不妨设 $c_1\geqslant0$，若不然可取 $-\alpha$ 代替 α. 这时必有：

(i) $c_1\neq0$. 若 $c_1=0$，则 $d_1=\pm1$，由式(33.18)得 $v_1=\varepsilon$，这和 $v_1\geqslant\sqrt{3}/2$ 及 ε 的取值(见式(33.10))矛盾.

(ii) $c_1\neq1$. 若 $c_1=1$，分 $d_1=0$ 及 $|d_1|\geqslant1$ 两种情形来讨论. 当 $d_1=0$ 时，$\tau_1=\alpha(\tau)=a_1-1/\tau$，这时有

$$v_1=\frac{v}{u^2+v^2}\leqslant\frac{\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon^2}=\frac{1}{2+\varepsilon},$$

这里用到了 $\tau\in L_1$ 时 $|u|\geqslant\sqrt{2\varepsilon}$. 上式和 $v_1\geqslant\sqrt{3}/2$ 矛盾. 当 $|d_1|\geqslant1$ 时，由式(33.18)得

$$\frac{1}{v_1}\geqslant\frac{1}{\varepsilon}(|d_1|-|u|)^2+\varepsilon\geqslant\frac{1}{\varepsilon}(1-1/2)^2+\varepsilon=\frac{1}{4\varepsilon}+\varepsilon,$$

这里用到了 $\tau\in L_1$ 时 $|u|\leqslant1/2$. 上式亦和 $v_1\geqslant\sqrt{3}/2$ 及 ε 的取值(见式(33.10))矛盾.

由式(33.16)，(33.17)及 L_1 的定义就推出式(33.15)对 $j=1$ 成立.

下面来计算在 L_2 上的积分. 由式(6.11)知

$$\eta^{-1}(\tau)=e^{-\pi i/4}\tau^{1/2}\eta^{-1}(-1/\tau). \tag{33.19}$$

因此

$$I_2=\int_{L_2}\eta^{-1}(\tau)e^{-2\pi im\tau}d\tau=e^{-\pi i/4}\int_{L_2}\tau^{1/2}\eta^{-1}(-1/\tau)e^{-2\pi im\tau}d\tau. \tag{33.20}$$

作变量替换 $\tau=e^{3\pi i/2}w=-iw$，即把 L_2 顺时针旋转 $3\pi/2$ 变为（见图 33.1）

$$L_2':\ \mathrm{Re}w=-\varepsilon,\quad -\sqrt{2\varepsilon}\leqslant \mathrm{Im}w<\sqrt{2\varepsilon}.\qquad(33.21)$$

要注意的是，当 $\tau\in L_2$ 时，它的辐角变化范围是：$0<\arg\tau<\pi$，所以，当 $w\in L_2'$ 时，

$$-3\pi/2<\arg w<-\pi/2.\qquad(33.21')$$

这样就有

$$I_2=e^{-\pi i/4}\int_{L_2}\tau^{1/2}\eta^{-1}(-1/\tau)e^{-2\pi i m\tau}d\tau$$
$$=\int_{L_2'}w^{1/2}\eta^{-1}(-i/w)e^{-2\pi mw}dw.$$

当 $w\in L_2'$ 时，$w=-\varepsilon+iv$，$|v|\leqslant\sqrt{2\varepsilon}$，由式(33.10)知

$$\mathrm{Re}\frac{1}{w}=\frac{-\varepsilon}{\varepsilon^2+v^2}\leqslant\frac{-1}{\varepsilon+2}<-\frac{1}{3},$$

所以，由此及式(33.4)得

$$|\eta^{-1}(-i/w)-e^{-2\pi/(24w)}|=|e^{-\pi/(12w)}(P(e^{2\pi/w})-1)|$$
$$=\left|e^{-\pi/(12w)}\sum_{j=1}^{\infty}p(j)e^{2\pi j/w}\right|$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}p(j)e^{-2\pi(j-1/24)/3}\ll 1.$$

因此得到（利用式(33.10)）

$$I_2=\int_{L_2'}w^{1/2}e^{-2\pi(mw+1/(24w))}dw+O(e^{2\pi m\varepsilon})$$
$$=I_3+O(e^{\lambda\sqrt{m}/4}).\qquad(33.22)$$

下面来计算积分 I_3. 设正数 $\delta<2\varepsilon$. 考虑正向积分围道 $G=L_2'+C_1+C_2+\cdots+C_9$（见图 33.1，并注意当 $w\in L_2'$ 时辐角的取值(33.21)）：

$$C_1:\ \mathrm{Im}w=\sqrt{2\varepsilon},\quad -\varepsilon\leqslant\mathrm{Re}w\leqslant 0;$$
$$C_2:\ \mathrm{Re}w=0,\quad \sqrt{2\varepsilon}\geqslant\mathrm{Im}w\geqslant\delta;$$
$$C_3:\ |w|=\delta,\quad -3\pi/2\geqslant\arg w\geqslant-2\pi;$$

C_4: $\mathrm{Im}w = 0$,　$\delta \leqslant \mathrm{Re}w \leqslant 2\varepsilon$;

C_5: $|w| = 2\varepsilon$,　$-2\pi \leqslant \arg w \leqslant 0$;

C_6: $\mathrm{Im}w = 0$,　$2\varepsilon \geqslant \mathrm{Re}w \geqslant \delta$;

C_7: $|w| = \delta$,　$0 \geqslant \arg w \geqslant -\pi/2$;

C_8: $\mathrm{Re}w = 0$,　$-\delta \geqslant \mathrm{Im}w \geqslant -\sqrt{2\varepsilon}$;

C_9: $\mathrm{Im}w = -\sqrt{2\varepsilon}$,　$0 \geqslant \mathrm{Re}w \geqslant -\varepsilon$.

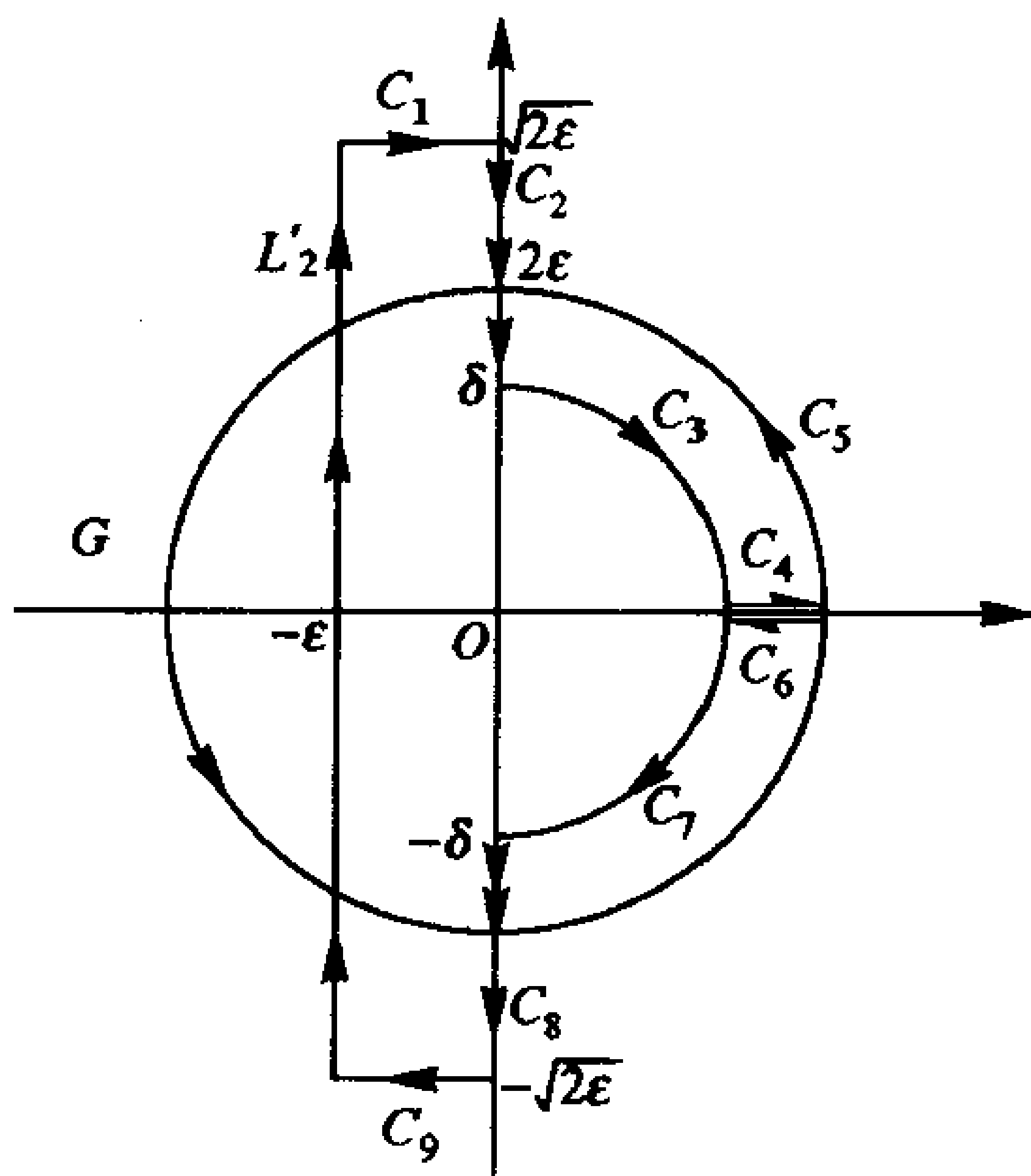


图　33.1

由 Cauchy 积分定理知

$$I_3 = -\left(\int_{C_1} + \cdots + \int_{C_9}\right) w^{1/2} e^{-2\pi(mw+1/(24w))} dw. \quad (33.23)$$

先来估计在 $C_j(j \neq 4,5,6)$上的积分，证明它们都是次要项. 容易验证：

$$\mathrm{Re}(mw + 1/(24w)) \geqslant 0, \quad w \in C_3, C_7,$$

所以

$$\left|\int_{C_3}\right| \leqslant \frac{1}{2}\pi\delta^{3/2}, \quad \left|\int_{C_7}\right| \leqslant \frac{1}{2}\pi\delta^{3/2}; \quad (33.24)$$

$$\mathrm{Re}(mw + 1/(24w)) = 0, \quad w \in C_2, C_8,$$

所以，

$$\left|\int_{C_2}\right| \leqslant \int_0^{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3}(2\varepsilon)^{3/4}, \quad \left|\int_{C_8}\right| \leqslant \frac{2}{3}(2\varepsilon)^{3/4}.$$

$$(33.25)$$

在 C_1, C_9 上，$w = u \pm \mathrm{i}\sqrt{2\varepsilon}$，$-\varepsilon \leqslant u \leqslant 0$，故有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(mw + 1/(24w)) &= mu + u^2/(24(u^2 + 2\varepsilon)) \\ &> -m\varepsilon - 1/(48).\end{aligned}$$

因此得

$$\left|\int_{C_1}\right| \ll \mathrm{e}^{2\pi m\varepsilon} = \mathrm{e}^{\lambda\sqrt{m}/4}, \quad \left|\int_{C_9}\right| \ll \mathrm{e}^{\lambda\sqrt{m}/4}. \tag{33.26}$$

综合式(33.23)～(33.26)，并令 $\delta \to 0$，注意到这时积分线路 C_4, C_5，C_6 变为引理 33.4 中的积分围道 D(取 $a = 2\pi m, b = \pi/12$，及 $\sqrt{b/a} = 2\varepsilon$)，就推出

$$\begin{aligned}I_3 &= -\int_D w^{1/2}\mathrm{e}^{-aw-b/w}\mathrm{d}w + O(\mathrm{e}^{\lambda\sqrt{m}/4}) \\ &= I_4 + O(\mathrm{e}^{\lambda\sqrt{m}/4}).\end{aligned}$$

由引理 33.4 得

$$\begin{aligned}I_4 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}J(a,b) = \left(\frac{\sqrt{\pi b}}{a} - \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}}\right)(\mathrm{e}^{2\sqrt{ab}} - \mathrm{e}^{-2\sqrt{ab}}) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda\sqrt{m}}}{4\sqrt{3}\,m}\left(1 - \frac{1}{\lambda\sqrt{m}}\right)(1 - \mathrm{e}^{-2\lambda\sqrt{m}}) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda\sqrt{m}}}{4\sqrt{3}\,m}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right).\end{aligned}$$

这样一来，由式(33.11)，(33.15)，(33.20)，(33.22)及以上两式就推出式(33.12). 进而即得式(33.12′)(留给读者). 证毕.

定理 33.2 的证明实质上是解析数论中圆法的最简单应用，这一结果是 Hardy 和 Ramanujan 得到的. 后来，Rademacher 利用 η 函数的一般函数方程(见 §15 末的(A))，由圆法得到了 $p(n)$的级数表示式. 有关本节内容可参看[P&P1]的绪论、第三十六章及所引的文献.

第十二章　附　　录

为方便读者，本附录列出了本书所需要的一些数学知识备查，大多没有证明，但给出了参考书. 它们是：§ 34 的二阶整数矩阵，§ 35 的 Dirichlet 特征，以及 § 36 的有关函数论的若干知识.

§ 34　二阶整数矩阵

二阶整数矩阵是本书中经常要用的重要工具，因此，在本节中将有关的知识作较为一般的集中介绍，以方便本书的应用. 先引进一些符号. 本节中总假定

$$n, N, r \in \boldsymbol{N}, \quad r \mid N. \tag{34.1}$$

记二阶整数矩阵集合

$$M(n; N, r) = \left\{ \alpha = \begin{bmatrix} a & rb \\ Nc & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}, \right.$$

$$\left. (a, N) = 1, |\alpha| = n \right\}, \tag{34.2}$$

$$M^*(n; N, r) = \{ \alpha \in M(n; N, r) : (a, b, c, d) = 1 \}, \tag{34.3}$$

$$M_1(n; N, r) = \{ \alpha \in M(n; N, r) : a \equiv 1 (\bmod N) \}, \tag{34.4}$$

及

$$M_1^*(n; N, r) = \{ \alpha \in M_1(n; N, r) : (a, b, c, d) = 1 \}. \tag{34.5}$$

显见，当 $n=1$ 时它们都构成群，以及当 n 无平方因子时，

$$M(n; N, r) = M^*(n; N, r), \quad M_1(n; N, r) = M_1^*(n; N, r).$$

对几个重要且常用的集合给以下面的专门记号：

$$\begin{aligned} &M(n; 1, 1) = M_1(n; 1, 1) = M(n), \\ &M^*(n; 1, 1) = M_1^*(n; 1, 1) = M^*(n), \end{aligned} \tag{34.6}$$

$$\begin{aligned} &M(1; N, r) = M^*(1; N, r) = \Gamma_0(N, r), \\ &M(1; N, 1) = \Gamma_0(N), \end{aligned} \tag{34.7}$$

$$M_1(1;N,r) = M_1^*(1;N,r) = \Gamma_1(N,r),\quad M_1(1;N,1) = \Gamma_1(N), \tag{34.8}$$

$$M(1;1,1) = \mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z}) = \Gamma,\quad M_1(1;N,N) = \Gamma(N). \tag{34.9}$$

定义 34.1 Γ 称为**完全模群**,$\Gamma(N)$称为 N **级主同余子群**,$\Gamma_0(N)$称为 N **级 Hecke 同余子群**. Γ 的子群 Γ' 称为**模群**,以及 Γ 的子群 Γ' 称为 N **级同余子群**,如果 $\Gamma(N)\subseteq\Gamma'$.

显见,$M(1;N,r)$,$M_1(1;N,r)$都是同余子群. 容易证明(留给读者):对素数 $p|N,l\geqslant 0$ 有

$$M(p^l;N,r) = M^*(p^l;N,r),\quad M_1(p^l;N,r) = M_1^*(p^l;N,r); \tag{34.10$_1$}$$

以及对素数 $p\nmid N$, $l\geqslant 0$ 有

$$M(p^l;N,r) = \bigcup_{0\leqslant 2j\leqslant l}\begin{bmatrix} p^j & 0 \\ 0 & p^j\end{bmatrix}M^*(p^{l-2j};N,r). \tag{34.10$_2$}$$

一般的,我们有

$$M(n;N,r) = \bigcup_{l^2|n,(l,N)=1}\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l\end{bmatrix}M^*(n/l^2;N,r). \tag{34.11}$$

我们记

$$M(N,r) = \bigcup_{n\geqslant 1}M(n;N,r),\quad M_1(N,r) = \bigcup_{n\geqslant 1}M_1(n;N,r), \tag{34.12}$$

它们是半群,且有

$$M_1(N,r)\subseteq M(N,r)\subseteq M(1,1) = \mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{Z})\subseteq \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}). \tag{34.13}$$

对整数矩阵

$$\sigma = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v\end{bmatrix}, \tag{34.14}$$

我们记

$$\gcd(\sigma) = (s,t,u,v). \tag{34.15}$$

在进一步讨论之前,再介绍一些群的有关概念.

定义 34.2 设 G 是群,U_1,U_2 是 G 的两个子群. 再设 $\sigma_1,\sigma_2\in G$.

若存在 $\gamma\in U_1$，使得 $\sigma_1=\gamma\sigma_2$，则称 σ_1 **对于子群 U_1 左相似于** σ_2；若存在 $\gamma\in U_2$，使得 $\sigma_1=\sigma_2\gamma$，则称 σ_1 **对于子群 U_2 右相似于** σ_2. 显见，左相似和右相似都是一种等价关系. 对于子群 U_1 左相似于 σ_2 的全体元素为

$$U_1\sigma_2 = \{\eta_1\sigma_2 : \eta_1 \in U_1\}, \tag{34.16}$$

称为是**子群 U_1 的右陪集**. 对于子群 U_2 右相似于 σ_1 的全体元素为

$$\sigma_1U_2 = \{\sigma_1\eta_2 : \eta_2 \in U_2\}, \tag{34.17}$$

称为是**子群 U_2 的左陪集**. 设 $\Omega\subseteq G$ 满足条件

$$U_1\Omega = \Omega U_2 = \Omega. \tag{34.18}$$

这样，Ω 中的元素就可分别按左相似或右相似这二种等价关系来分类，把 Ω 分别表为这两种两两不相交的等价类集合——即两两不相交的 U_1 的右陪集或两两不相交的 U_2 的左陪集——之并：

$$\Omega = \bigcup_{\sigma\in\{U_1\backslash\Omega\}} U_1\sigma, \tag{34.19}$$

它称为是 **Ω 关于 U_1 的右陪集分解**，记作 $U_1\backslash\Omega$，这里 $\{U_1\backslash\Omega\}$（有时也记作 $U_1\backslash\Omega$）是由每一个右陪集中取定一个代表元组成的集合，称为是 **Ω 关于 U_1 的右陪集分解代表系**；以及

$$\Omega = \bigcup_{\sigma\in\{\Omega/U_2\}} \sigma U_2, \tag{34.20}$$

它称为是 **Ω 关于 U_2 的左陪集分解**，记作 Ω/U_2，这里 $\{\Omega/U_2\}$（有时也记作 Ω/U_2）是由每一个左陪集中取定一个代表元组成的集合，称为是 **Ω 关于 U_2 的左陪集分解代表系**. 代表系可以是有限或无限. 此外，对 $\alpha\in G$，我们把

$$U_1\alpha U_2 \tag{34.21}$$

称为**双陪集**.

显见，当取 $\Omega=U_1\alpha U_2$ 时，满足条件(34.18)，所以有形如式(34.19) 和(34.20)的右陪集分解和左陪集分解. 容易看出，$U_1\alpha U_2$ 的右陪集分解代表系可取为

$$\{U_1\backslash U_1\alpha U_2\} = \{\alpha\eta_{2j} : \eta_{2j} \in U_2,\ j = 1,2,\cdots\}; \tag{34.22}$$

$U_1\alpha U_2$ 的左陪集分解代表系可取为

$$\{U_1\alpha U_2/U_2\} = \{\eta_{1j}\alpha : \eta_{1j} \in U_1,\ j = 1,2,\cdots\}. \tag{34.23}$$

下面的定理刻画了双陪集的左(或右)陪集分解与群 U_1(或 U_2)

关于其子群$U_1\cap(\alpha U_2\alpha^{-1})$(或$U_2\cap(\alpha^{-1}U_1\alpha)$)的左(或右)陪集分解之间的一一对应关系.

定理 34.1 设G是群,U_1,U_2是G的两个子群,及$\alpha\in G$.那么,

(i) $U_1\alpha U_2=\bigcup U_1\alpha\eta_{2j}$成立的充要条件是

$$U_2=\bigcup(U_2\cap(\alpha^{-1}U_1\alpha))\eta_{2j};$$

(ii) $U_1\alpha U_2=\bigcup\eta_{1j}\alpha U_2$成立的充要条件是

$$U_1=\bigcup\eta_{1j}(U_1\cap(\alpha U_2\alpha^{-1})).$$

证 容易看出,对任意的$\sigma_1,\sigma_2\in U_2$,

$$U_1\alpha\sigma_1=U_1\alpha\sigma_2$$

成立的充要条件是

$$\sigma_1\in(U_2\cap(\alpha^{-1}U_1\alpha))\sigma_2,$$

即

$$(U_2\cap(\alpha^{-1}U_1\alpha))\sigma_1=(U_2\cap(\alpha^{-1}U_1\alpha))\sigma_2.$$

由此,就推出(i)中的两式等价(为什么).(ii)的证明留给读者.证毕.

我们主要用到的双陪集是$U_1=U_2=U$的情形.下面来证明关于这种双陪集的陪集分解的基本性质.当满足条件

$$[U:U\cap(\alpha^{-1}U\alpha)]=[U:U\cap(\alpha U\alpha^{-1})]=d \quad (34.24)$$

时,由定理 34.1 知,这时有相应的双陪集的有限陪集分解和群的有限陪集分解:

$$U\alpha U=\bigcup_{j=1}^{d}U\alpha\eta_{2j}=\bigcup_{j=1}^{d}U\alpha_{2j},\quad U=\bigcup_{j=1}^{d}(U\cap(\alpha^{-1}U\alpha))\eta_{2j}; \quad (34.25)$$

及

$$U\alpha U=\bigcup_{j=1}^{d}\eta_{1j}\alpha U=\bigcup_{j=1}^{d}\alpha_{1j}U,\quad U=\bigcup_{j=1}^{d}(U\cap(\alpha^{-1}U\alpha))\eta_{1j}. \quad (34.26)$$

定理 34.2 设G是群,U是G的子群,$\alpha\in G$,及满足条件(34.24).那么,

(i) 对任意的$1\leqslant i,j\leqslant d$,$\alpha_{1i}U$(见式(34.26))和$U\alpha_{2j}$(见式(34.25))的交一定非空;

(ii) $U\alpha U$一定存在相同的左、右陪集分解代表系,即存在δ_j,

$l \leqslant j \leqslant d$，使得

$$U\alpha U = \bigcup_{j=1}^{d} \delta_j U = \bigcup_{j=1}^{d} U\delta_j;$$

(iii) $U\alpha U$ 的左(右)陪集分解代表系可取在任意指定的同一个右(左)陪集中，即对任意的 $\zeta \in U\alpha U$，存在 $\alpha_{1j} \in U\zeta$，$1 \leqslant j \leqslant d$，及 $\alpha_{2j} \in \zeta U$，$1 \leqslant j \leqslant d$，使得

$$U\alpha U = \bigcup_{j=1}^{d} \alpha_{1j} U = \bigcup_{j=1}^{d} U\alpha_{2j}.$$

证　只要证(i)，(ii)和(iii)是(i)的直接推论(留给读者)．用反证法．若不然，不妨设 $\alpha_{11}U$ 和 $U\alpha_{21}$ 的交为空集．这样就有

$$U\alpha_{21} \subseteq \bigcup_{j=2}^{d} \alpha_{1j} U.$$

因而得

$$U\alpha U = U\alpha_{21} U \subseteq \bigcup_{j=2}^{d} \alpha_{1j} U.$$

但这和左陪集分解(34.26)矛盾．证毕．

下面我们将取群 G 为 $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q})$，子群 $U_1 = U_2 = U$ 为 $\Gamma_0(N, r)$ 或 $\Gamma_1(N, r)$，Ω 由式(34.2)，(34.3)或(34.4)，(34.5)所给出，以及 α 相应地属于由式(34.2)，(34.3)或(34.4)，(34.5)所确定的矩阵集合，这时条件(34.24)均成立，所以可以具体讨论这样的 Ω，及双陪集 $U\alpha U$ 的陪集分解和有关性质．这些知识在本书中，特别是讨论 Hecke 算子时，是经常要用到的．首先来证明一个引理．

引理 34.3　设

$$\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{R}), \tag{34.27}$$

其转置矩阵 $\alpha^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$．再设 u, v 是给定的两个正数，及

$$\alpha^* = \alpha^*(u, v) = \begin{bmatrix} u/v & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \alpha^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} u/v & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & vc/u \\ ub/v & d \end{bmatrix}. \tag{34.28}$$

那么，

(i) 对应 $\alpha \mapsto \alpha^* = \alpha^*(u, v)$ 的是 $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{R})$ 上的一个反自同构；

(ii) 当取 $u = N$，$v = r$ 时，对应 $\alpha \mapsto \alpha^* = \alpha^*(N, r)$ 的分别是

$M(n;N,r)$, $M^*(n;N,r)$, $M_1(n;N,r)$及$M_1^*(n;N,r)$上的反自同构.

证 容易验证，当$\alpha,\beta\in \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{R})$时，有

$$(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*, \quad (\alpha^*)^* = \alpha. \tag{34.29}$$

这就证明了(i). 而当取$u=N, v=r$时，对$\alpha,\beta\in M(n;N,r)$, $M^*(n;N,r)$, $M_1(n;N,r)$或$M_1^*(n;N,r)$, α^*,β^*也相应地属于$M(n;N,r)$, $M^*(n;N,r)$, $M_1(n;N,r)$或$M_1^*(n;N,r)$，这就证明了(ii).

定理 34.4 对任意的$\alpha\in M^*(n;N,r)$，必有

$$\Gamma_0(N,r)\alpha\Gamma_0(N,r) = \Gamma_0(N,r)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & n\end{bmatrix}\Gamma_0(N,r), \tag{34.30}$$

即

$$M^*(n;N,r) = \Gamma_0(N,r)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & n\end{bmatrix}\Gamma_0(N,r). \tag{34.31}$$

特别的，有

$$M^*(n) = \Gamma\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & n\end{bmatrix}\Gamma. \tag{34.32}$$

证 式(34.30)就是要证明：存在$\eta,\gamma\in\Gamma_0(N,r)$，使得

$$\gamma\alpha\eta = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & n\end{bmatrix}. \tag{34.33}$$

设$\alpha\in M^*(n;N,r)$由式(34.2)给出，我们一定可取到

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} s_1 & rt_1\\ -Nc/(a,c) & a/(a,c)\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N,r),$$

使得

$$\alpha_1 = \sigma_1\alpha = \begin{bmatrix}a_1 & rb_1\\ 0 & d_1\end{bmatrix}\in M^*(n;N,r), \quad a_1 = (a,c) > 0.$$

设$b_1=q'a_1+b'$, $0\leqslant b'<a_1$，我们有

$$\alpha_1 T^{-rq'} = \begin{bmatrix}a_1 & rb'\\ 0 & d_1\end{bmatrix} = \alpha' \in M^*(n;N,r), \quad 0\leqslant b' < a_1.$$

下面分几种情形来讨论α'. (i) 若$(a,b')=1$，则可取到

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} s_2 & -rb' \\ Nt_2 & a_1 \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N, r),$$

使得

$$\alpha' \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Nd_1t_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}.$$

综合以上各式就得到式(34.33). (ii) 若 $b'=0$,则$(a_1,d_1)=1$. 由

$$T^r \alpha' = \begin{bmatrix} a_1 & rd_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}$$

知,这时可化为情形(i),所以式(34.33)也成立. (iii) 若 $a_1>(a_1,b')$ $=a_2>1$,则可取 $\sigma_3=\begin{bmatrix} s_3 & -rb'/a_2 \\ Nt_3 & a_1/a_2 \end{bmatrix}\in\Gamma_0(N,r)$,得到

$$\alpha' \sigma_3 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ Nt_3d_1 & n/a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ Nc_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M(n;N,r), \quad 1 < a_2 < a_1.$$

记

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} a_2 & rc_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \in M(n;N,r), \quad 1 < a_2 < a_1,$$

就得到

$$\alpha' \sigma_3 = \alpha_2^* \in M(n;N,r),$$

这里 α_2^* 是引理 34.3(ii)中定义的反自同构: $\alpha \mapsto \alpha^*(N,r)$. 这就证明了: 对 α_1 存在 $\gamma_1,\eta_1\in\Gamma_0(N,r)$,使得

$$\gamma_1\alpha_1\eta_1 = \alpha_2^*, \quad 1 < a_2 < a_1.$$

注意到 α_2 与 α_1 有相同的形式,且 $1<a_2<a_1$. 我们可以继续对 α_2 作对 α_1 所作的讨论,这样,若干步后一定会得到式(34.33). 具体论证留给读者.

定理 34.5　对任意的 $\alpha\in M_1^*(n;N,r)$,必有

$$\Gamma_1(N,r)\alpha\Gamma_1(N,r) = \Gamma_1(N,r)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}\Gamma_1(N,r), \quad (34.34)$$

即

$$M_1^*(n;N,r) = \Gamma_1(N,r)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}\Gamma_1(N,r). \quad (34.35)$$

证 设 α 由式(34.2)给出，$a\equiv 1(\mathrm{mod}\, N)$. 由定理 34.4 知，必有

$$\sigma_j = \begin{bmatrix} e_j & rf_j \\ Ng_j & h_j \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N,r), \quad j = 1,2,$$

使得

$$\alpha = \sigma_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \sigma_2.$$

一定可取到整数 t 满足

$$e_2 t \equiv 1(\mathrm{mod}\, N), \quad (t,n) = 1$$

(为什么). 进而取

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2 & f_2 \\ -rNg_2 & -e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix},$$

显然有(为什么)

$$(f_3,h_3) = 1, \quad h_3 \equiv 1(\mathrm{mod}\, N).$$

故而可取到

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} e_3 & rf_3 \\ Ng_3 & h_3 \end{bmatrix} \in \Gamma_1(N,r).$$

这时有

$$\sigma_2\sigma_3 = \begin{bmatrix} e_4 & rn \\ Ng_4 & h_4 \end{bmatrix} = \sigma_4 \in \Gamma_0(N,r).$$

容易验证

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \sigma_4 = \begin{bmatrix} e_4 & r \\ Nng_4 & h_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \sigma_5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix},$$

$$\sigma_5 \in M(1;N,r).$$

综合以上各式即得

$$\alpha = \sigma_1\sigma_5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \sigma_3^{-1}.$$

由此及 $\sigma_3 \in \Gamma_1(N,r)$，$\alpha \in M_1(n;N,r)$，就推出 $\sigma_1\sigma_5 \in \Gamma_1(N,r)$. 这就证明了所要的结论.

定理 34.4 和 34.5 表明 $M^*(n;N,r)$ 和 $M_1^*(n;N,r)$ 都是双陪集. $M(n;N,r)$ 和 $M_1(n;N,r)$ 虽然不是双陪集，利用式(34.11)，由定

理 34.4 和 34.5 可推出它们都是一些双陪集之并.

定理 34.6　(i) 若 $\alpha\in M(n;N,r)$，则有

$$\Gamma_0(N,r)\alpha\Gamma_0(N,r)=\Gamma_0(N,r)\begin{bmatrix}l & 0\\0 & n/l\end{bmatrix}\Gamma_0(N,r),\quad(34.36)$$

其中 $l=\gcd(\alpha)$；

(ii) 若 $\alpha\in M_1(n;N,r)$，则有

$$\Gamma_1(N,r)\alpha\Gamma_1(N,r)=\Gamma_1(N,r)\nu(l)\begin{bmatrix}l & 0\\0 & n/l\end{bmatrix}\Gamma_1(N,r),\quad(34.37)$$

其中 $l=\gcd(\alpha)$，$\nu(l)$ 为任意取定的一个矩阵，满足

$$\nu(l)\in\Gamma_0(N,N),\quad \nu(l)\equiv\begin{bmatrix}l^{-1} & 0\\0 & l\end{bmatrix}(\bmod N),$$
$$ll^{-1}\equiv1(\bmod N).\quad(34.38)$$

证　显然有

$$\alpha=\begin{bmatrix}l & 0\\0 & l\end{bmatrix}\beta,\quad \beta\in M^*(n/l^2;N,r).\quad(34.39)$$

由此及定理 34.4 就推出(i). 顺便指出，当 $\alpha\in M(n;N,r)$ 时，由式(34.15)定义的 l 必满足：

$$l^2\mid n,\quad (l,N)=1.\quad(34.40)$$

下面来证(ii). 当 $\alpha\in M_1(n;N,r)$ 时，必有 $\nu^{-1}(l)\beta\in M_1^*(n/l^2;N,r)$. 因而由定理 34.5 得

$$\Gamma_1(N,r)\nu^{-1}(l)\beta\Gamma_1(N,r)=\Gamma_1(N,r)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & n/l^2\end{bmatrix}\Gamma_1(N,r).$$

进而有

$$\begin{aligned}&(\nu(l)\Gamma_1(N,r)\nu^{-1}(l))\alpha\Gamma_1(N,r)\\&\quad=(\nu(l)\Gamma_1(N,r)\nu^{-1}(l))\nu(l)\begin{bmatrix}l & 0\\0 & n/l\end{bmatrix}\Gamma_1(N,r).\end{aligned}$$

由此及

$$\nu(l)\Gamma_1(N,r)\nu^{-1}(l)=\Gamma_1(N,r)\quad(34.41)$$

就推出(ii). 证毕.

由定理 34.6，式(34.11)和(34.40)就推出

定理 34.7 我们有

$$M(n;N,r)=\bigcup_{l^2|n,(l,N)=1}\Gamma_0(N,r)\begin{bmatrix}l&0\\0&n/l\end{bmatrix}\Gamma_0(N,r);\quad(34.42)$$

及

$$M_1(n;N,r)=\bigcup_{l^2|n,(l,N)=1}\Gamma_1(N,r)\nu(l)\begin{bmatrix}l&0\\0&n/l\end{bmatrix}\Gamma_1(N,r),\quad(34.43)$$

其中 $\nu(l)$ 由式(34.38)给出. 特别的, 有

$$M(n)=\bigcup_{l^2|n}\Gamma\begin{bmatrix}l&0\\0&n/l\end{bmatrix}\Gamma.\quad(34.44)$$

由定理 34.6 还可推出：这里的双陪集在引理 34.3(ii)的反自同构下是不变的, 即

定理 34.8 设 $\alpha\mapsto\alpha^*=\alpha^*(N,r)$是引理 34.3(ii)中定义的反自同构. 那么对任意的正整数 n 有

$$(\Gamma_0(N,r)\alpha\Gamma_0(N,r))^*=\Gamma_0(N,r)\alpha\Gamma_0(N,r),\quad \alpha\in M(n;N,r);\quad(34.45)$$

$$(\Gamma_1(N,r)\alpha\Gamma_1(N,r))^*=\Gamma_1(N,r)\alpha\Gamma_1(N,r),\quad \alpha\in M_1(n;N,r).\quad(34.46)$$

证明留给读者. 下面来讨论陪集分解.

定理 34.9 (i) 我们有右陪集分解及左陪集分解

$$M(n;N,r)=\bigcup_{\substack{a|n,(a,N)=1\\ b\bmod n/a}}\Gamma_0(N,r)\begin{bmatrix}a&rb\\0&n/a\end{bmatrix},\quad(34.47)$$

$$M(n;N,r)=\bigcup_{\substack{a|n,(a,N)=1\\ c\bmod n/a}}\begin{bmatrix}a&0\\Nc&n/a\end{bmatrix}\Gamma_0(N,r),\quad(34.48)$$

这里求和条件 $b\ \mathbf{mod}\ n/a$(**或** $c\ \mathbf{mod}\ n/a$)表示对模 n/a 的任意取定的一组完全剩余系求和. 右(左)陪集(即右(左)陪集分解代表系元素)的个数等于 $n_2\sigma(n_1)$, 这里

$$n_1n_2=n,\quad (n_1,N)=1, \text{及素数 } p|n_2\Rightarrow p|N, \text{即 } p|N^\infty;\quad(34.49)$$

(ii) 我们有右陪集分解及左陪集分解

$$M^*(n;N,r)=\bigcup_{\substack{a|n,(a,N)=1\\ b \bmod n/a,(a,n/a,b)=1}}\Gamma_0(N,r)\begin{bmatrix}a & rb\\ 0 & n/a\end{bmatrix},\quad(34.50)$$

$$M^*(n;N,r)=\bigcup_{\substack{a|n,(a,N)=1\\ c \bmod n/a,(a,n/a,c)=1}}\begin{bmatrix}a & 0\\ Nc & n/a\end{bmatrix}\Gamma_0(N,r),\quad(34.51)$$

这里求和条件 $b \bmod n/a,(a,n/a,b)=1$(或 $c \bmod n/a,(a,n/a,c)=1$)表示对模 n/a 的任意取定的一组完全剩余系中与$(a,n/a)$既约的数求和. 右(左)陪集(即右(左)陪集分解代表系元素)的个数等于

$$n\prod_{p|n_1}\left(1+\frac{1}{p}\right),\quad(34.52)$$

其中 n_1 由式(34.49)给出.

证 对任一由式(34.2)给出的 $\alpha\in M(n;N,r)$,设 σ_1 由定理34.4 给出,我们有

$$\alpha_1=\sigma_1\alpha=\begin{bmatrix}a_1 & rb_1\\ 0 & d_1\end{bmatrix}\in M(n;N,r),\quad a_1=(a,c)>0,$$

即必有

$$\alpha\in\Gamma_0(N,r)\begin{bmatrix}a_1 & rb_1\\ 0 & d_1\end{bmatrix},\quad a_1>0,\quad a_1d_1=n.\quad(34.53)$$

另一方面,若有

$$\begin{bmatrix}a' & b'\\ 0 & d'\end{bmatrix}\in\Gamma_0(N,r)\begin{bmatrix}a_1 & rb_1\\ 0 & d_1\end{bmatrix},\quad a'>0,$$

则必有

$$\begin{bmatrix}a'/a_1 & r(-a'b_1+b'a_1)/n\\ 0 & d'/d_1\end{bmatrix}\in\Gamma_0(N,r).$$

因而得(为什么)

$$a'=a_1,\quad d'=d_1,\quad 及\quad b'=b_1(\bmod d_1).$$

这表明式(34.47)右边的各个右陪集是两两不相交的. 由此及式(34.53) 就证明了式(34.47). 对任一 $\alpha\in M^*(n;N,r)$,显见,

$$\alpha\in M(1;N,r)\begin{bmatrix}a & rb\\ 0 & n/a\end{bmatrix}$$

的充要条件是$(a,n/a,b)=\gcd(\alpha)=1$. 由此及式(34.47)就推出式

(34.50).

利用引理 34.3(ii)中的反自同构 $\alpha \mapsto \alpha^* = \alpha^*(N,r)$，由式(34.47) 和(34.50)就分别推出式(34.48)和(34.51).

这里我们直接证明了 $M(n;N,r)$及 $M^*(n;N,r)$的左、右陪集分解中的个数都是分别相等的. 下面分别来求这两个数，把它们记为 $D(n;N,r)$ 和 $D^*(n;N,r)$. 我们有(利用式(34.49))

$$D(n;N,r) = \sum_{\substack{a\mid n\\(a,N)=1}} \frac{n}{a} = n_2\sum_{a\mid n_1}\frac{n_1}{a} = n_2\sigma(n_1);$$

以及利用式(34.49)有

$$D^*(n;N,r) = \sum_{\substack{a\mid n\\(a,N)=1}} \sum_{\substack{b=1\\(b,a,n/a)=1}}^{n/a} 1 = \sum_{a\mid n_1} \sum_{\substack{b=1\\(b,a,n_1/a)=1}}^{n_2n_1/a} 1$$

$$= n_2\sum_{a\mid n_1}\sum_{b=1}^{n_1/a}\sum_{d\mid(b,a,n_1/a)}\mu(d) = n_2\sum_{a\mid n_1}\sum_{d\mid(a,n_1/a)}\mu(d)\frac{n_1}{ad}$$

$$= n\sum_{a\mid n_1}\frac{1}{a}\prod_{p\mid(a,n_1/a)}\left(1-\frac{1}{p}\right) = n\sum_{a\mid n_1} f(a;n_1),$$

容易验证：对$(a,a')=1$，$aa'\mid n_1$ 有

$$f(aa';n_1) = \frac{1}{aa'}\prod_{p\mid(aa',n_1/aa')}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

$$= \left\{\frac{1}{a}\prod_{p\mid(a,n_1/a)}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\}\cdot\left\{\frac{1}{a'}\prod_{p\mid(a',n_1/a')}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\}$$

$$= f(a;n_1)f(a';n_1),$$

即 $f(a;n_1)$，$a\mid n_1$ 是积性函数. 所以有

$$D^*(n;N,r) = n\prod_{p^l\parallel n_1}\{1+f(p;n_1)+\cdots+f(p^l;n_1)\}$$

$$= n\prod_{p^l\parallel n_1}\left\{1+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p^2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{p^{l-1}}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p^l}\right\}$$

$$= n\prod_{p\mid n_1}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

至此定理全部证毕.

定理 34.10　设 $\nu(l)$ 由式(34.38)给出.

(i) 我们有右陪集分解及左陪集分解

$$M_1(n;N,r)=\bigcup_{\substack{a|n,(a,N)=1\\ b\bmod n/a}}\Gamma_1(N,r)\nu(a)\begin{bmatrix}a & rb\\ 0 & n/a\end{bmatrix},\quad(34.54)$$

$$M_1(n;N,r)=\bigcup_{\substack{a|n,(a,N)=1\\ c\bmod n/a}}\begin{bmatrix}a & 0\\ Nc & n/a\end{bmatrix}\nu(a)\Gamma_1(N,r),$$

(34.55)

这里求和条件同定理 34.9(i). 右(左)陪集(即右(左)陪集分解代表系元素)的个数等于 $n_2\sigma(n_1)$, n_1, n_2 由式(34.49)给出;

(ii) 我们有右陪集分解及左陪集分解

$$M_1^*(n;N,r)=\bigcup_{\substack{a|n,(a,N)=1\\ b\bmod n/a,(a,n/a,b)=1}}\Gamma_1(N,r)\nu(a)\begin{bmatrix}a & rb\\ 0 & n/a\end{bmatrix},$$

(34.56)

$$M_1^*(n;N,r)=\bigcup_{\substack{a|n,(a,N)=1\\ c\bmod n/a,(a,n/a,c)=1}}\begin{bmatrix}a & 0\\ Nc & n/a\end{bmatrix}\nu(a)\Gamma_1(N,r),$$

(34.57)

这里求和条件同定理 34.9(ii). 右(左)陪集(即右(左)陪集分解代表系元素)的个数等于

$$n\prod_{p|n_1}\left(1+\frac{1}{p}\right),\quad(34.58)$$

其中 n_1 由式(34.49)给出.

证　我们来证式(34.54). 由式(34.47)的证明知,式(34.54)右边的各个右陪集两两不相交. 而对任一 $\alpha\in M_1(n;N,r)$,由式(34.53)知,

$$\nu(a_1)\sigma_1\alpha=\nu(a_1)\begin{bmatrix}a_1 & rb_1\\ 0 & d_1\end{bmatrix}\in M_1(n;N,r),$$

由此及 $\alpha\in M_1(n;N,r)$ 知 $\nu(a_1)\sigma_1\in M_1(n;N,r)$,因而

$$\alpha\in M_1(n;N,r)\nu(a_1)\begin{bmatrix}a_1 & rb_1\\ 0 & d_1\end{bmatrix}.$$

这就证明了式(34.54).其他结论的证明与定理 34.9 对应结论的证明完全相同,留给读者.

为了以后引用方便,我们来写出 $M(n)$,$M^*(n)$(见式(34.6))关于完全模群 Γ(见式(34.9))的陪集分解,并进一步讨论 n 等于素数的情形.所有的推导都留给读者.

定理 34.11 我们有 (i)

$$M(n)=\bigcup_{a|n,b\bmod n/a}\Gamma\begin{bmatrix}a & b\\0 & n/a\end{bmatrix}=\bigcup_{a|n,c\bmod n/a}\Gamma\begin{bmatrix}a & 0\\c & n/a\end{bmatrix}\Gamma$$

$$=\bigcup_{a|n,b\bmod a}\begin{bmatrix}a & b\\0 & n/a\end{bmatrix}\Gamma=\bigcup_{a|n,c\bmod a}\Gamma\begin{bmatrix}a & 0\\c & n/a\end{bmatrix},\qquad(34.59)$$

右(左)陪集(即右(左)陪集分解代表系元素)的个数等于 $\sigma(n)$;

(ii) $$M^*(n)=\bigcup_{\substack{a|n,b\bmod n/a\\(a,n/a,b)=1}}\Gamma\begin{bmatrix}a & b\\0 & n/a\end{bmatrix}=\bigcup_{\substack{a|n,c\bmod n/a\\(a,n/a,c)=1}}\begin{bmatrix}a & 0\\c & n/a\end{bmatrix}\Gamma$$

$$=\bigcup_{\substack{a|n,b\bmod a\\(a,n/a,b)=1}}\begin{bmatrix}a & b\\0 & n/a\end{bmatrix}\Gamma=\bigcup_{\substack{a|n,c\bmod a\\(a,n/a,c)=1}}\Gamma\begin{bmatrix}a & 0\\c & n/a\end{bmatrix};$$

(34.60)

右(左)陪集(即右(左)陪集分解代表系元素)的个数等于

$$n\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right).\qquad(34.61)$$

此外,还有

$$[\Gamma:\Gamma_0(n)]=[\Gamma:\Gamma^0(n)]=n\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right).\qquad(34.62)$$

定理 34.12 设 p 是素数.我们有

$$M(p)=M^*(p)=\Gamma\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & p\end{bmatrix}\Gamma$$

$$=\left\{\bigcup_{b=0}^{p-1}\Gamma\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & p\end{bmatrix}T^b\right\}\cup\left\{\Gamma\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & p\end{bmatrix}S\right\}$$

$$=\left\{\bigcup_{b=0}^{p-1}T^b\begin{bmatrix}p & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\Gamma\right\}\cup\left\{S\begin{bmatrix}p & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\Gamma\right\},\qquad(34.63)$$

以及

$$\delta_{ij}=\begin{bmatrix}-j & p-ij\\ -1 & -i\end{bmatrix}\in\left\{\Gamma\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{bmatrix}T^{i}\right\}\cap\left\{T^{j}\begin{bmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Gamma\right\},$$

$$0\leqslant i,j\leqslant p-1,$$

$$\delta_{ip}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{bmatrix}T^{i}\in\left\{\Gamma\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{bmatrix}T^{i}\right\}\cap\left\{S\begin{bmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Gamma\right\},$$

$$0\leqslant i\leqslant p-1,$$

$$\delta_{pj}=T^{j}\begin{bmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in\left\{\Gamma\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{bmatrix}S\right\}\cap\left\{T^{j}\begin{bmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Gamma\right\},$$

$$0\leqslant j\leqslant p-1,$$

$$\delta_{pp}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ p & 0\end{bmatrix}\in\left\{\Gamma\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{bmatrix}S\right\}\cap\left\{S\begin{bmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Gamma\right\}.$$

由定理 34.12 即可得到双陪集 $M(p)$的相应于定理 34.2(ii)和(iii)要求的各种陪集分解代表系. 例如,相同的左、右陪集分解代表系可取为:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}-i & p-i^{2}\\ -1 & -i\end{bmatrix},\quad 0\leqslant i\leqslant p-1,\quad\begin{bmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\tag{34.64}$$

这是常用的. 请读者自己写出几个其他形式的代表系.

§ 35 Dirichlet 特征

本节内容及其证明可参看[P&P1,第十三章],[P&P3,第九章 § 4],[HL,第七章].

定义 35.1 设 q 是给定的正整数. 一个定义在整数集合 $\mathbf{Z}$ 上不恒为零的复值函数 $\chi(n)$,若满足条件:

(i) 周期性: $\chi(n+q)=\chi(n)$, $n\in\mathbf{Z}$;

(ii) 完全积性: $\chi(mn)=\chi(m)\chi(n)$, $m,n\in\mathbf{Z}$;

(iii) 当$(n,q)>1$ 时,$\chi(n)=0$, $n\in\mathbf{Z}$,

则称为是**模 q 的 Dirichlet 特征**或**模 q 的剩余特征**,简称为**模 q 的特征**,通常记为 $\chi(n;q)$,$\chi\bmod q$. 特征 $\chi(n)\equiv1$,$(n,q)=1$;$\chi(n)=0$,$(n,q)>1$,称为是**模 q 的主特征**,记作 $\chi^{0}(n;q)$,$\chi^{0}\bmod q$,其他的称为

模 q 的非主特征；取实值的特征称为**实特征**，其他的称为**复特征**.

Dirichlet 特征的基本性质有

性质 35.1 设 χ 是模 q 的特征，则有

(i) $\chi(1)=1,\chi(-1)=\pm1$，及

$$(\chi(n))^{\varphi(q)}=1,\quad (n,q)=1;$$

(ii) $\overline{\chi(n)}$ 也是模 q 的特征，称为是 $\chi(n)$ 的**共轭特征**，记作 $\bar{\chi}$；

(iii) 两个模 q 的特征的乘积也是模 q 的特征.

性质 35.2 对给定的正整数 q，全体模 q 的特征对乘法组成一个有限交换群，幺元素是主特征 χ^0，特征 χ 的逆元素是它的共轭特征 $\bar{\chi}$.

性质 35.3 设 χ_1,χ_2 分别是模 q_1,q_2 的特征，则 $\chi_1\chi_2$ 是模 $[q_1,q_2]$ 的特征.

性质 35.4 设 $q=q_1q_2\cdots q_r$，$q_1,q_2,\cdots,q_r$ 两两互素. 那么，对模 q 的任一特征 $\chi(n;q)$，必有惟一一组模 $q_1,q_2,\cdots,q_r$ 的特征 $\chi_1(n;q_1)$，$\chi_2(n;q_2),\cdots,\chi_r(n;q_r)$，使得

$$\chi(n;q)=\chi_1(n;q_1),\chi_2(n;q_2),\cdots,\chi_r(n;q_r),\tag{35.1}$$

且 χ 是主特征，实特征的充要条件分别是 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_r$ 都是主特征，实特征. 特别的，当有素数分解式 $q=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 时，必有惟一的分解式

$$\chi(n;q)=\chi_0(n;2^{\alpha_0})\chi_1(n;p_1^{\alpha_1})\cdots\chi_s(n;p_s^{\alpha_s}).\tag{35.2}$$

性质 35.5 设素数 $p>2$，α 是正整数，g 是模 p^α（对所有 $\alpha\geqslant1$）的原根，以及 $\gamma(n)$ 是以原根 g 为底 n 对模 p^α 的指标. 那么，模 p^α 的特征恰有 $\varphi(p^\alpha)$ 个，它们是：

$$\chi(n;p^\alpha,l)=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{2\pi i l\gamma(n)}{\varphi(p^\alpha)}\right), & p\nmid n;\\ 0, & p\mid n,\end{cases}\quad l=0,1,\cdots,\varphi(p^\alpha)-1.\tag{35.3}$$

此外，当且仅当 $l=\varphi(p^\alpha)/2$ 时是非主实特征.

性质 35.6 设 α 是正整数，模 2^α 的特征恰有 $\varphi(2^\alpha)$ 个，它们是

$$\chi(n;2^\alpha,l_{-1},l_0)=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{2\pi i l_{-1}\gamma^{(-1)}(n)}{2}\right)\exp\left(\dfrac{2\pi i l_0\gamma^{(0)}(n)}{2^{\alpha-2}}\right), & 2\nmid n;\\ 0, & 2\mid n,\end{cases}$$

$$0 \leqslant l_{-1} < c_{-1}, \quad 0 \leqslant l_0 < c_0, \tag{35.4}$$

其中

$$c_{-1} = c_{-1}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha = 1, \\ 2, & \alpha \geqslant 2, \end{cases}$$

$$c_0 = c_0(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha = 1, \\ 2^{\alpha-2}, & \alpha \geqslant 2, \end{cases}$$

以及 $\gamma^{(-1)}(n)$，$\gamma^{(0)}(n)$ 是(以 -1 和 5 为底的) n 对模 2^α 的指标组. 此外，模 $2^\alpha(\alpha \leqslant 3)$ 的特征都是实特征，模 $2^\alpha(\alpha > 3)$ 的特征仅当 $l_0 = 2^{\alpha-3}$ 时是实特征.

性质 35.7 模 q 的特征恰有 $\varphi(q)$ 个. 模 q 的全体特征组成的乘法群与模 q 的全体既约剩余类(即模 q 的既约剩余系)组成的乘法群同构.

性质 35.8 设 $q \geqslant 1$. 我们有

$$\sum_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(a)\chi(n) = \begin{cases} \varphi(q), & n \equiv a \pmod q, \\ 0, & n \not\equiv a \pmod q, \end{cases} \tag{35.5}$$

这里求和号表示对模 q 的所有特征求和；以及

$$\sum_{n \bmod q}{}^{*} \chi(n;q) = \begin{cases} \varphi(q), & \chi \text{ 是模 } q \text{ 的主特征}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{35.6}$$

这里求和号表示对模 q 的一个既约剩余系求和.

定义 35.2 设 χ 是模 q 的特征. 若存在 $1 \leqslant q' < q$，使对任意的 $(n_1 n_2, q) = 1$，$n_1 \equiv n_2 \pmod{q'}$，必有 $\chi(n_1) = \chi(n_2)$，则称 χ 是**模 q 的非原特征**，反之，则称 χ 是**模 q 的原特征**.

性质 35.9 $\chi(n;q)$ 是原特征的充要条件是它的表示式(35.1)(或(35.2))右边的各个特征都是原特征.

性质 35.10 (i) 模 q 的主特征是原特征当且仅当 $q=1$，即仅有 $\chi^0(n;1) \equiv 1$，$n \in \mathbf{Z}$，是原特征；(ii) 模 2 没有原特征；模 4 有一个原特征，即非主特征

$$\chi(n;4,1,0) = (-1)^{(n-1)/2}, \quad 2 \nmid n, \tag{35.7}$$

模 $2^\alpha(\alpha \geqslant 3)$ 的特征 $\chi(n;2^\alpha, l_{-1}, l_0)$ (见式(35.4))是原特征当且仅且当 $(l_0, 2) = 1$，故有 $2^{\alpha-2}$ 个原特征；(iii) 对奇素数 p，模 p^α 的特征 $\chi(n;p^\alpha, l)$ (见式(35.3))是原特征当且仅当 $(l,p)=1$. 模 p 有 $p-2$

个原特征，模 $p^\alpha(\alpha\geqslant 2)$ 有 $p^{\alpha-2}(p-1)^2$ 个原特征.

性质 35.11 (i) 模 1 的特征 $\chi(n;1)$ 是实原特征；

(ii) 模 2^α $(\alpha\geqslant 1)$ 当且仅当 $\alpha=2,3$ 时有实原特征，它们是：$\chi(n;4,1,0)$（见式(35.7)），

$$\chi(n;8,0,1)=(-1)^{(n^2-1)/8},\quad 2\nmid n, \tag{35.8}$$

及

$$\chi(n;8,1,1)=\chi(n;4,1,0)\chi(n;8,0,1); \tag{35.9}$$

(iii) p 是奇素数，模 $p^\alpha(\alpha\geqslant 1)$ 当且仅当 $\alpha=1$ 时有实原特征，它是

$$\chi\left(n;p,\frac{p-1}{2}\right)=\left(\frac{n}{p}\right); \tag{35.10}$$

(iv) 模 q 的特征 $\chi(n;q)$ 是实原特征的充要条件是它的表示式(35.1)（或(35.2)）的右边各个特征都是实原特征. 因此，模 q 有原特征的充要条件是它的素数分解式 $q=2^{\alpha_0}p_1p_2\cdots p_s$，$\alpha_0=0,2,3$，相应的实原特征由式(35.2)，(35.7)，(35.8)，(35.9)及(35.10)给出.

性质 35.12 对模 q 的特征 $\chi(n;q)$，必有惟一的模 q^*，$q^*\mid q$ 及惟一的模 q^* 的原特征 $\chi^*(n;q^*)$，使得

$$\chi(n;q)=\chi^*(n;q^*),\quad (n,q)=1. \tag{35.11}$$

反之，对模 q^* 的原特征 $\chi^*(n;q^*)$，任给模 q，$q^*\mid q$，必有惟一的模 q 的特征 $\chi(n;q)$ 使式(35.11)成立.

事实上有

$$\chi(n;q)=\chi^\circ(n;q)\chi^*(n;q^*).$$

我们把 $\chi^*(n;q^*)$ 称为是**对应于 $\chi(n;q)$ 的原特征**，把 $\chi(n;q)$ 称为是**由原特征 $\chi^*(n;q^*)$ 导出的特征**. 这种一一对应关系记作

$$\chi(n;q)\Longleftrightarrow\chi^*(n;q^*),\quad \chi \bmod q\Longleftrightarrow\chi^* \bmod q^*, \tag{35.12}$$

或简记为 $\chi\Longleftrightarrow\chi^*$. 显见 $\chi^\circ \bmod q\Longleftrightarrow\chi^\circ \bmod 1$.

下面是 Gauss 和的性质. 设 $f(n)$ 是以 q 为周期的算术函数，那么，它有有限 Fourier 展式

$$f(n)=\sum_{l=1}^{q}a(l)\mathrm{e}^{-2\pi inl/q},$$

其中

$$a(l)=\sum_{m \bmod q}f(m)\mathrm{e}^{2\pi ilm/q},$$

求和号表示对模 q 的完全剩余系求和，显见 $a(l)$ 也是以 q 为周期的算术函数. 特别的，当取 $f(n)$ 是模 q 的特征 $\chi(n)=\chi(n;q)$ 时，我们记 $a(l)$ 为

$$G(l;\chi) = \sum_{m \bmod q} \chi(m) e^{2\pi i l m/q}, \tag{35.13}$$

它称为是**关于模 q 的特征 χ 的 Gauss 和，简称 Gauss 和**. 我们记

$$\tau(\chi) = G(1,\chi) = \sum_{m \bmod q} \chi(m) e^{2\pi i m/q}, \tag{35.14}$$

及

$$C_q(l) = G(l,\chi^{\circ}) = \sum_{m \bmod q} \chi^{\circ}(m) e^{2\pi i l m/q}$$

$$= \sum_{m \bmod q}{}^{*} e^{2\pi i l m/q}, \tag{35.15}$$

其中求和号是对模 q 的既约剩余系求和. $C_q(l)$ 通常称为 **Ramanujan 和**.

性质 35.13 设 $(q_1,q_2)=1$, $\chi_1 \bmod q_1$, $\chi_2 \bmod q_2$, 以及把 $\chi_1\chi_2$ 看做是模 q_1q_2 的特征. 那么有

$$G(l;\chi_1\chi_2) = \chi_1(q_2)\chi_2(q_1)G(l;\chi_1)G(l;\chi_2).$$

性质 35.14 Ramanujan 和 $C_q(l)$ 是 q 的积性函数，且有

$$C_q(l) = \frac{\varphi(q)}{\varphi(q/(l,q))}\mu(q/(l,q)),$$

特别的，

$$C_q(l) = \tau(\chi^{\circ}) = \mu(q), \quad (l,q) = 1,$$

其中 $\mu(q)$ 是 Möbius 函数.

性质 35.15 设 $\chi \bmod q \Longleftrightarrow \chi^* \bmod q^*$. 我们有

$$\tau(\chi) = \chi^*(q/q^*)\mu(q/q^*)\tau(\chi^*).$$

性质 35.16 设 χ 是模 q 的原特征. 那么，

(i) 对任意的 l 有

$$G(l;\chi) = \bar{\chi}(l)\tau(\chi);$$

(ii) $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$;

(iii) 当 χ 是实原特征时，

$$\tau(\chi) = \begin{cases} \sqrt{q}, & \chi(-1) = 1, \\ \mathrm{i}\sqrt{q}, & \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

(iii)的证明见[HL,第七章§5定理8].

§36　有关函数论的若干知识

本节内容及其证明可参看[P&P1,第一,二,三,四章].

Euler-Gama 函数 $\Gamma(s)$可以用多种方式来定义,最清楚的应该是利用无穷乘积.

定义 36.1　复变函数 $\Gamma(s)$的倒数是

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}, \tag{36.1}$$

其中 γ 是 Euler 常数,即

$$\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log N\right) = 0.5772156649\cdots. \tag{36.2}$$

容易证明:式(36.1)中的无穷乘积是整函数,以且仅以 $s=0,-1,-2,\cdots,-n,\cdots$为其零点,阶数均为 1. 所以,$\Gamma(s)$是半纯函数,以且仅以 $s=0,-1,-2,\cdots,-n,\cdots$为其极点,阶数均为 1. 以下是 $\Gamma(s)$的基本性质.

性质 36.1(Euler)

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s},\quad \Gamma(1)=1.$$

性质 36.2(Euler-Gauss)

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \lim_{N\to\infty}\frac{s(s+1)\cdots(s+N-1)}{(N-1)!N^s} = \lim_{N\to\infty}(-1)^{N-1}sN^{-s}\binom{-s-1}{N-1}.$$

性质 36.3(函数方程)　$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$.

性质 36.4(积分表示)

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty}e^{-u}u^{s-1}du,\quad \mathrm{Re}s>0.$$

性质 36.5(余元公式)

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{\sin\pi s}{\pi}.$$

由性质 36.4 和 36.5 推出

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}. \tag{36.3}$$

性质 36.6(Stirling 公式) 设 $a<b$ 是给定实数, $s=\sigma+\mathrm{i}t$. 那么, 当 $|t|\to\infty$ 时, 对 $a\leqslant\sigma\leqslant b$ 一致地有

$$\Gamma(s)=\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\pi|t|/2}|t|^{\sigma-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\log|t|-1)}\mathrm{e}^{\lambda(\sigma-1/2)\pi\mathrm{i}/2}(1+O|t|^{-1}),$$

其中 O 常数仅和 a,b 有关, 以及当 $t\geqslant1$ 时, $\lambda=1$; 当 $t\leqslant-1$ 时, $\lambda=-1$. 此外, 有

$$|\Gamma(s)|=\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\pi|t|/2}|t|^{\sigma-1/2}(1+O(|t|^{-1})).$$

下面是 Mellin 变换的反转公式.

定理 36.7 设 $g(x)$ 是定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的实值函数, 且在任一有限区间上有界变差. 再设复变数 $s=\sigma+\mathrm{i}t$. 我们把

$$G(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}g(x)\mathrm{d}x$$

称为是 $g(x)$ 的 **Mellin 变换**. 如果当 $\mathrm{Re}s=\sigma_0$ 时上述积分绝对收敛, 那么有

$$\begin{aligned}\bar{g}(x)&=\frac{1}{2}(g(x+0)+g(x-0))\\&=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma_0-\mathrm{i}A}^{\sigma_0+\mathrm{i}A}x^{-s}G(s)\mathrm{d}s,\quad x>0.\end{aligned}$$

如果积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|G(\sigma_0+\mathrm{i}t)|\mathrm{d}t$$

存在, 则有

$$\bar{g}(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma_0-\mathrm{i}\infty}^{\sigma_0+\mathrm{i}\infty}x^{-s}G(s)\mathrm{d}s.$$

由定理 36.7 及性质 36.4 推出

$$\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}x^{-s}\Gamma(s)\mathrm{d}s,\quad x>0,\quad \mathrm{Re}s>0. \tag{36.4}$$

最后, 我们给出 Phragmen-Lindelof 原理, 它是复分析中最大模原理的一个重要推广.

定理 36.8 设 $f(s)$ 是半带形区域: $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2, t\geqslant t_0\geqslant1$ 内及其

边界上的解析函数，且对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$|f(\sigma+\mathrm{i}t)|\leqslant M(\varepsilon)\mathrm{e}^{\varepsilon t},\quad \sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2,\quad t\geqslant t_0,$$

其中常数 $M(\varepsilon)$ 仅和 ε 有关. 再设存在实数 k_1,k_2,M_1 及 M_2 使

$$|f(\sigma_j+\mathrm{i}t)|\leqslant M_j t^{k_j},\quad t\geqslant t_0,\quad j=1,2.$$

那么，当 $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$ 时一致地有

$$|f(\sigma+\mathrm{i}t)|\leqslant Mt^{k(\sigma)},\quad t\geqslant t_0,$$

其中 M 是和 t_0,σ_j,M_j 及 $k_j(j=1,2)$ 有关的常数，以及

$$k(\sigma)=k_1\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}+k_2\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}.$$

名词索引

这里给出了若干常用的名词，并按照先后次序给出了本书的通用名词以及部分的英译名和相应符号，以方便阅读查询. 书中有特殊说明者除外.

符 号 索 引

这里给出了若干常用的数学符号，并按照先后次序给出了本书的通用符号，以及部分的相应含义，以方便阅读查询. 书中有特殊说明者除外.

符号	相应含义	所在位置
$\boldsymbol{N}$	正整数集合	
$\boldsymbol{Z}$	整数集合	
$\boldsymbol{Q}$	有理数集合	
$\boldsymbol{R}$	实数集合	
$\boldsymbol{C}$	复数集合，复平面	
$\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$	完全复平面	
$(a,b,\cdots,c)$	$a,b,\cdots,c$ 的最大公约数	
	由 $a,b,\cdots,c$ 组成的数组	
	由 $a,b,\cdots,c$ 组成的向量	
$[a,b,\cdots,c]$	$a,b,\cdots,c$ 的最小公倍数	
$\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$	模 n 的剩余类环	
$\boldsymbol{Z}_n^*$	$\boldsymbol{Z}_n$ 中的乘法群	
$\varphi(n)$	Euler 函数 ($1,\cdots,n$ 中和 n 互素的数的个数)	
$\mu(n)$	Möbius 函数	(1.21)
Λ 或 Λ_f	周期集合	定义 1.1
$\Lambda=\Lambda(\omega_1,\omega_2)$	点格，格	定义 1.2，(1.12)
$\{\omega_1,\omega_2\}$	格的一组基	定义 1.2，(1.12)
$\mathrm{GL}_2(K)$	K 上的(二阶)一般线性群	(1.8′)
$\mathrm{SL}_2(K)$	K 上的(二阶)特殊线性群	(1.9)
$\mathrm{GL}_2^+(K)$		(1.10)
$\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{R})$	辛群	定义 1.3
$\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z}),\Gamma$	完全模群	定义 1.3
Γ',Γ'' 等	模群	定义 1.3
$\{\omega_1,\omega_2\}$	基本周期对	定义 1.4
Π_0,Π_s		(1.16)，(1.17)

参 考 书 目

[HL] 华罗庚,数论导引,科学出版社,1957(1995 第 6 次印刷).

[RG] R. C. Gunning, Lectures on Modular Forms, Princeton, 1962.

[AO] A. Ogg, Modular Forms and Dirichlet Series, W. A. Benjamin, 1969.

[GS] G. Schimura, Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Princeton University Press, 1971.

[JS] J. -P. Serre, A Course in Arithmetic, Springer-Verlag, 1973. (中译本: J. -P. 塞尔著,冯克勤译,数论教程,上海科学技术出版社, 1980.)

[BS] B. Schoeneberg, Elliptic Modular Functions, Springer-Verlag, 1974.

[TA] T. M. Apostol, Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory, Springer-Verlag, GTM41, 1976.

[NK] N. Koblitz, Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, Springer-Verlag, GTM97, 1984.

[EG] Emil Grosswald, Representation of Integers as Sums of Squares, Springer-Verlag, 1985.

[TM] T. Miyake, Modular Forms, Springer-Verlag, 1989.

[PS] P. Sanark, Some Applications of Modular Forms, Cambridge University Press, 1990.

[P&P1] 潘承洞、潘承彪,解析数论基础,科学出版社,1991.

[P&P2] 潘承洞、潘承彪,代数数论,第二版,山东大学出版社,2001. (第一版书名为: 初等代数数论,1991)

[P&P3] 潘承洞、潘承彪,初等数论,北京大学出版社,1992.

[AK] A. W. Knapp, Elliptic Curves, Princeton University Press, 1992.

[PD] 裴定一,模形式和三元二次型,上海科学技术出版社,1994.

以上是撰写本书时所参考的著作.

* * * * * *

[数百 1] 日本数学会编,数学百科辞典,科学出版社,1984.

[数百 2] 中国大百科全书·数学,中国大百科全书出版社,1988.

[数百 3] 数学百科全书,第 1～5 卷,科学出版社,2000.

这是三本数学百科全书可以查阅有关数学家、数学分支、数学名词等资料.

* * * * * *

近年出版的有关著作有

[HI] H. Iwaniec, Topics in Classical Automorphic Forms, AMS, 1997.

[AB] A. Borel, Automorphic Forms on $SL_2(\boldsymbol{R})$, Cambridge University Press, 1997.

[DB] D. Bump, Automorphic Forms and Representations, Cambridge University Press, 1997.

[LH] 陆洪文、李云峰,模形式讲义,北京大学出版社,1999.

[YY] 叶扬波,模形式与迹公式,北京大学出版社,2001.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝模形式导引
作者＝潘承洞，潘承彪著
页数＝３３３
ＳＳ号＝１０９０７４０２
出版日期＝２００２年